MI - 402 Inferência Estatística
Segundo semestre de 2010
Lista de exercícios IX

1. Considerando as questões 3, 4, 5, 6 e 7 da Lista VI encontre quantidades pivotais assintóticas para os parâmetros desconhecidos. Com tais q.p.'s encontre intervalos de confiança assintóticos, com c.c de aproximadamente γ.

2. Dizemos que uma v.a. contínua X tem distribuição gama-inversa de parâmetros r e λ, $X \sim gama - inversa(r, \lambda)$ se sua f.d.p é da forma:

$$f_X(x;\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\Gamma(r)\lambda^r} x^{-r-1} e^{-\frac{1}{\lambda x}} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x), r > 0, \lambda > 0$$

   Calcule $\mathcal{E}(X^k), k > 0$ e $\mathcal{V}ar(X)$.

3. Seja $X_1, ..., X_n$ uma a.a. de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ com μ conhecido. Assuma que, a priori, $\sigma^2 \sim gama - inversa(r, \lambda)$, com r e λ conhecidos. Considere a função de perda quadrática.

   Responda os itens:

   a) Encontre o estimador de Bayes sob perda quadrática de σ^2 e $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$.
   b) Encontre um intervalo de credibilidade com coeficiente de credibilidade γ para σ^2.

4. Seja $X_1, ..., X_n$ uma amostra aleatória de $X \sim \exp(\theta)$, $E(X) = \theta$. Assuma uma distribuição a priori $\theta \sim X \sim gama - inversa(r, \lambda)$, com r e λ conhecidos. Obtenha o estimador de Bayes sob perda quadrática e construa um intervalo de credibilidade de $\gamma\%$ para θ.

5. Resolva as questões sobre inferência Bayesiana das qualificações de 2010.1 e 2010.2.

6. Resolva os exercícios deixados em sala.

7. Considere uma amostra aleatória de tamanho 1 de uma uniforme $U(0, \theta)$ com distribuição à priori $\pi(\theta) = \theta e^{-\theta} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(\theta)$

   Responda os itens:

   a) Mostre que a distribuição a posteriori de θ é dada por $\pi(\theta|x) = e^{-(\theta - x)} \mathbb{1}_{(x,\infty)}(\theta)$

b) Encontre o estimador de Bayes de θ sob perda quadrática.

c) Construa um intervalo de credibilidade de $\gamma\%$ para θ.

8. Seja X uma única observação de $f_X(x;\theta) = \frac{2x}{\theta}\mathbb{1}_{[0,\theta]}(x), \theta > 0$. Assumindo uma priori $\theta \sim U(0,1)$ obtenha o estimador de Bayes para θ em relação à função de perda $L(\theta, d) = \theta^2(d-\theta)^2$.

9. Considere uma única observação de X, em que

$$f_X(x;\theta) = \frac{1}{2}\exp\left(-|x-\theta|\right)\mathbb{1}_{(-\infty,\infty)}(x), \theta > 0$$

Considerando que a distribuição a priori é $\pi(\theta) = e^{-\theta}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(\theta)$ calcule a distribuição a posteriori e o respectivo estimador de Bayes sob perda quadrática de θ.