

ME 731 - Métodos em Análise Multivariada
 Segundo semestre de 2017
 Lista de Exercícios VII

1. Na análise de correlações canônicas considere um vetor aleatório $\mathbf{X}_{(p+q)}$, $p \leq q$, com as devidas partições do vetor de médias $\boldsymbol{\mu} = \mathcal{E}(\mathbf{X})$, da matriz de covariâncias $\boldsymbol{\Sigma} = Cov(\mathbf{X})$ e da matriz de correlações $\boldsymbol{\rho} = Corre(\mathbf{X})$. Considere o vetor aleatório padronizado \mathbf{Z} com as partições correspondentes.

Sejam $\mathbf{U}_{(p \times 1)}^{(\mathbf{Z})} = (U_1^{(\mathbf{Z})}, \dots, U_p^{(\mathbf{Z})})'$ as $\mathbf{V}_{(q \times 1)}^{(\mathbf{Z})} = (V_1^{(\mathbf{Z})}, \dots, V_q^{(\mathbf{Z})})'$ as variáveis canônicas obtidas a partir do vetor \mathbf{Z} . Responda os itens:

- Prove todos os resultados deixados como em exercícios, relativos à este assunto.
 - Suponha que $\mathbf{X}_{(p+q)} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. Qual a distribuição conjunta do vetor $(\mathbf{U}^{(\mathbf{Z})}, \mathbf{V}^{(\mathbf{Z})})'$? As componentes de $\mathbf{U}^{(\mathbf{Z})}$ são independentes? O são as componentes de $\mathbf{V}^{(\mathbf{Z})}$? Com relação às componentes de $\mathbf{U}^{(\mathbf{Z})}$ e $\mathbf{V}^{(\mathbf{Z})}$, o que podemos afirmar no que diz respeito à independência de suas componentes?
2. Considere a metodologia de análise de discriminante apresentada em classe. Considere dois vetores aleatórios independentes \mathbf{X}_1 e \mathbf{X}_2 , tais que $\mathbf{X}_i \sim N_p(\boldsymbol{\mu}_i, \boldsymbol{\Sigma}_i)$, $i=1,2$. Considere \mathbf{x} um valor observado de algum desses dois vetores. Responda os itens:
- Prove que, se $\boldsymbol{\Sigma}_1 = \boldsymbol{\Sigma}_2 = \boldsymbol{\Sigma}$ então, $-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_1)' \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_1) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_2)' \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_2) = (\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2)' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{x} - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2)' \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\mu}_1 + \boldsymbol{\mu}_2)$.
 - Seja $y_i = (\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2)' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}_i$ e $m = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2)' \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\mu}_1 + \boldsymbol{\mu}_2)$. Prove que $m = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$
 - Prove que, se $\boldsymbol{\Sigma}_1 \neq \boldsymbol{\Sigma}_2$ então, $-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_1)' \boldsymbol{\Sigma}_1^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_1) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_2)' \boldsymbol{\Sigma}_2^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_2) = -\frac{1}{2} \mathbf{x}' (\boldsymbol{\Sigma}_1^{-1} - \boldsymbol{\Sigma}_2^{-1}) \mathbf{x} + (\boldsymbol{\mu}_1' \boldsymbol{\Sigma}_1^{-1} - \boldsymbol{\mu}_2' \boldsymbol{\Sigma}_2^{-1}) \mathbf{x} - c$, em que $c = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{|\boldsymbol{\Sigma}_1|}{|\boldsymbol{\Sigma}_2|} \right) + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\mu}_1' \boldsymbol{\Sigma}_1^{-1} \boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2' \boldsymbol{\Sigma}_2^{-1} \boldsymbol{\mu}_2)$
3. Considere os dados analisados no Trabalho 1 sobre “bitting fly”. Considere os dois seguintes grupos de variáveis: grupo 1 - comprimento da asa, largura da asa, grupo 2 - comprimento do terceiro palpo, largura do terceiro palpo, comprimento do quarto palpo, comprimento do 12º segmento da antena e comprimento do 13º segmento da antena. Realize uma análise de correlação canônica, à semelhança do que foi visto em sala.