ME 731 - Métodos em Análise Multivariada
Segundo semestre de 2015
Lista de Exercícios VII

1. Na análise de correlações canônicas considere um vetor aleatório $\boldsymbol{X}_{(p+q)}, p \leq q$, com as devidas partições do vetor de médias $\boldsymbol{\mu} = \mathcal{E}(\boldsymbol{X})$, da matriz de covariâncias $\boldsymbol{\Sigma} = Cov(\boldsymbol{X})$ e da matriz de correlações $\boldsymbol{\rho} = Corre(\boldsymbol{X})$. Considere o vetor aleatório padronizado $\boldsymbol{Z}$ com as partições correspondentes.
   Sejam $\boldsymbol{U}^{(\boldsymbol{Z})}_{(p\times 1)} = (U_1^{(\boldsymbol{Z})}, ..., U_p^{(\boldsymbol{Z})})'$ as $\boldsymbol{V}^{(\boldsymbol{Z})}_{(q\times 1)} = (V_1^{(\boldsymbol{Z})}, ..., V_q^{(\boldsymbol{Z})})'$ as variáveis canônicas obtidas a partir do vetor $\boldsymbol{Z}$. Responda os intens:
   a) Prove todos os resultados deixados como em exercícios, relativos à este assunto.
   b) Suponha que $\boldsymbol{X}_{(p+q)} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. Qual a distribuição conjunta do vetor $(\boldsymbol{U}^{(\boldsymbol{Z})}, \boldsymbol{V}^{(\boldsymbol{Z})})$? As componentes de $\boldsymbol{U}^{(\boldsymbol{Z})}$ são independentes? O são as componentes de $\boldsymbol{V}^{(\boldsymbol{Z})}$? Com relação às componentes de $\boldsymbol{U}^{(\boldsymbol{Z})}$ e $\boldsymbol{V}^{(\boldsymbol{Z})}$, o que podemos afirmar no que diz respeito à independência de suas componentes?

2. Considere a metodologia de análise de discrimante apresentada em classe. Considere dois vetores aleatórios independentes $\boldsymbol{X}_1$ e $\boldsymbol{X}_2$, tais que $\boldsymbol{X}_i \sim N_p(\boldsymbol{\mu}_i, \boldsymbol{\Sigma}_i)$, i=1,2. Considere $\boldsymbol{x}$ um valor observado de algum desses dois vetores. Responda os itens:
   a) Prove que, se $\boldsymbol{\Sigma}_1 = \boldsymbol{\Sigma}_2 = \boldsymbol{\Sigma}$ então, $-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}_1)'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}_1) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}_2)'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}_2) = (\boldsymbol{\mu}_1-\boldsymbol{\mu}_2)'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{x} - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\mu}_1-\boldsymbol{\mu}_2)'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\mu}_1+\boldsymbol{\mu}_2)$.
   b) Seja $y_i = (\boldsymbol{\mu}_1-\boldsymbol{\mu}_2)'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}_i$ e $m = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\mu}_1-\boldsymbol{\mu}_2)'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\mu}_1+\boldsymbol{\mu}_2)$. Prove que $m = \frac{1}{2}(y_1+y_2)$
   c) Prove que, se $\boldsymbol{\Sigma}_1 \neq \boldsymbol{\Sigma}_2$ então, $-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}_1)'\boldsymbol{\Sigma}_1^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}_1) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}_2)'\boldsymbol{\Sigma}_2^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}_2) = -\frac{1}{2}\boldsymbol{x}'\left(\boldsymbol{\Sigma}_1^{-1}-\boldsymbol{\Sigma}_2^{-1}\right)\boldsymbol{x} + \left(\boldsymbol{\mu}_1'\boldsymbol{\Sigma}_1^{-1}-\boldsymbol{\mu}_2'\boldsymbol{\Sigma}_2^{-1}\right)\boldsymbol{x} - c$, em que
   $$c = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{|\boldsymbol{\Sigma}_1|}{|\boldsymbol{\Sigma}_2|}\right) + \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\mu}_1'\boldsymbol{\Sigma}_1^{-1}\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2'\boldsymbol{\Sigma}_2^{-1}\boldsymbol{\mu}_2\right)$$

3. Considere os dados analisados no Trabalho 1 sobre "bitting fly". Considere os dois seguintes grupos de variáveis: grupo 1 - comprimento da asa, largura da asa, grupo 2 - comprimento do terceiro palpo, largura do terceiro palpo, comprimento do quarto palpo, comprimento do 12^o segmento da antena e comprimento do 13^o segmento da antena. Realize uma análise de correlação canônica, à semelhança do que foi visto em sala.