

MI - 402 Inferência Estatística
Segundo semestre de 2010
Lista de exercícios VI

Observação: Nas questões envolvendo a obtenção do teste MP ou UMP você deve especificar as regiões do teste, a obtenção do(s) ponto(s) crítico(s), bem como calcular a função poder.

1. Resolver as questões deixadas em classe.
2. Casella, G. & Berger, R.L. (2002). Statistical Inference, exercícios: 8.13, 8.15, 8.19, 8.23, 8.29, 8.31, 8.32, 8.33.
3. Seja X_1, \dots, X_n uma amostra aleatória de X ,

$$f_X(x; \theta) = \frac{1}{2\theta} e^{-\frac{|x|}{\theta}} \mathbb{1}_{(-\infty, \infty)}(x), \theta > 0$$

Responda os itens:

- a) Prove que a f.d.p. conjunta da amostra pertence à família exponencial e encontre uma estatística suficiente e completa.
 - b) Encontre o e.m.v e o e.m.m de θ e calcule suas esperanças e variâncias.
 - c) Obtenha o teste UMP de nível de significância α para as hipóteses $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0, \theta_0 > 0$.
especificando sua região crítica.
4. Seja X_1, \dots, X_n uma amostra aleatória de X ,

$$f_X(x; \theta) = \frac{1}{\theta^2} x e^{-\frac{x}{\theta}} \mathbb{1}_{(0, \infty)}(x), \theta > 0$$

Responda os itens:

- a) Mostre a inexistência ou encontre a região crítica do teste UMP de tamanho α para testar as hipóteses: $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0, \theta_0 > 0$.

- b) Mostre a inexistência ou encontre a região crítica do teste UMP de tamanho α para testar as hipóteses:

$$H_0 : \theta = \theta_0 \text{ vs } H_1 : \theta \neq \theta_0, \theta_0 > 0.$$

5. Seja X_1, \dots, X_n uma amostra aleatória de X ,

$$f_X(x; \theta) = \theta(1+x)^{-(1+\theta)} \mathbb{1}_{(0, \infty)}(x), \theta > 0$$

Responda os itens:

- a) Encontre o e.m.v de $\tau(\theta) = \frac{1}{\theta}$ e sua respectiva distribuição assintótica.
b) Obtenha o teste UMP para testar $H_0 : \theta \leq \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0, \theta_0 > 0$, especificando sua região crítica.

6. Seja X_1, \dots, X_n uma amostra aleatória de X ,

$$f_X(x; \theta) = \frac{1}{\theta} x^{(1-\theta)/\theta} \mathbb{1}_{(0,1)}(x), \theta > 0$$

- a) Encontre o e.m.v de $\tau(\theta) = \frac{1}{\theta}$ e sua respectiva distribuição assintótica.
b) Obtenha o teste UMP para testar $H_0 : \theta \leq \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0, \theta_0 > 0$, especificando sua região crítica.

7. Seja X_1, \dots, X_n uma amostra aleatória de X , em que

$$f_X(x; \alpha) = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp\left\{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta\right\} \mathbb{1}_{(0, \infty)}(x)$$

considere que $\beta > 0$ é **conhecido** e $\alpha > 0$ é **desconhecido**. Obtenha o teste mais poderoso de nível α^* para testar $H_0 : \alpha = \alpha_0$ vs $H_1 : \alpha = 2\alpha_0$.

8. Considere uma única observação de X , em que

$$f_X(x; \theta) = \frac{1}{2} \exp(|x - \theta|) \mathbb{1}_{(-\infty, \infty)}(x), \theta > 0$$

- a) Encontre o teste mais poderoso de tamanho α para testar $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta = \theta_1, \theta_1 > \theta_0$ em que $1 - \alpha \gg 1/2$
- b) Considere o espaço dos testes mais poderosos de tamanho α , em que $1 - \alpha \gg 1/2$, para testar $H_0 : \theta = 1$ vs $H_1 : \theta = 2$. Determine o elemento desse espaço, isto é, encontre o teste que minimiza a soma da $P(\text{Erro do tipo I}) + P(\text{Erro do tipo II})$.