

ME - 402 Inferência Estatística  
Segundo semestre de 2010  
Lista de exercícios V

1. Resolver as questões deixadas em classe.
2. Casella, G. & Berger, R.L. (2002). Statistical Inference, exercícios: 7.15 (item a), 7.37, 7.38, 7.49 (itens a), b)).
3. Seja  $X_1, \dots, X_n$  uma amostra aleatória de  $X$ , em que

$$f_X(x; \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\sigma} \exp \left\{ - \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right\} \mathbb{1}_{(\mu, \infty)}(x), \boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma), \mu \in \mathcal{R}, \sigma > 0.$$

Responda os itens:

- a) Considere  $\mu$  conhecido. Encontre o *ENVUM* de  $\sigma$ . Calcule sua respectiva variância.
  - b) Considere  $\sigma$  conhecido. Encontre o *ENVUM* de  $\mu$ . Calcule sua respectiva variância.
4. Seja  $X_1, \dots, X_n$  uma a.a. de  $X \sim FE_1(\theta)$  na sua forma canônica, de acordo com a parametrização descrita em classe. Responda aos itens:
    - a) Prove que a e.m.v de  $\theta$ , digamos  $\tilde{\theta}$ , satisfaz a seguinte equação:

$$\tilde{t}(\mathbf{x}) = \mathcal{E}(\tilde{t}(\mathbf{X}))$$

em que  $\tilde{t}(\mathbf{x})$  se refere à estatística avaliada no ponto  $\tilde{\theta}$ .

- b) Considerando a parametrização original, prove que  $\lim_{\theta \rightarrow \tau} c'(\theta) \left( t(\mathbf{x}) + \frac{d'(\theta)}{c'(\theta)} \right) = \frac{\partial}{\partial \theta} \ln f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}; \theta)$ . Assim, o *LICR*( $\tau(\theta)$ ) é atingido e então, existe algum estimador não viciado para  $\tau(\theta) = -\frac{d'(\theta)}{c'(\theta)}$  cuja variância coincide com esse limite (no caso, se  $\mathcal{E}(t(\mathbf{X})) = \tau(\theta)$ ,  $t(\mathbf{X})$ , então este é o *ENVUM*).
- c) Prove que  $T = t(\mathbf{X})$  é o *ENVUM* para  $-\frac{d}{d\eta} (d_0(\boldsymbol{\eta}))$ .

5. Seja  $X_1, \dots, X_n$  uma a.a. de  $X \sim U(0, \theta]$ ,  $\theta > 0$ . Encontre o ENVUM de  $\theta$  e calcule sua respectiva variância.
6. Seja  $X_1, \dots, X_n$  uma amostra aleatória de  $X$ ,

$$f_X(x; \boldsymbol{\theta}) = \frac{2x}{\beta^2 - \alpha^2} \mathbb{1}_{(\alpha, \beta)}(x), \boldsymbol{\theta} = (\alpha, \beta), 0 \leq \alpha < \beta < \infty$$

Se  $\alpha = 0$ , prove que  $\hat{\beta} = \left(\frac{2n+1}{2n}\right) Y_{(n)}$ , em que  $Y_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ , é o ENVUM de  $\beta$ . Calcule sua respectiva variância.

7. Seja  $X_1, \dots, X_n$  uma amostra aleatória de  $X$ ,

$$f_X(x; \theta) = \theta(1+x)^{-(1+\theta)} \mathbb{1}_{(0, \infty)}(x), \theta > 0$$

Responda os itens:

- Encontre uma estatística suficiente e completa para  $\theta$ .
  - Encontre o LICR para  $\tau(\theta) = \frac{1}{\theta}$ .
  - Encontre o ENVUM de  $\tau(\theta)$  e calcule sua respectiva variância.
8. Seja  $X_1, \dots, X_n$  uma a.a. de  $X$ ,  $X \sim U\{1, 2, \dots, \theta\}$ ,  $\theta \in \mathcal{N}^*$ . Prove que  $\hat{\theta} = \frac{Y_n^{n+1} - (Y_n - 1)^{n+1}}{Y_n^n - (Y_n - 1)^n}$  é o ENVUM de  $\theta$ , em que  $Y_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ .
9. Seja  $X_1, \dots, X_n$  uma a.a. de  $X$ , em que

$$f_X(x; \theta) = \frac{\ln(\theta)}{\theta - 1} \theta^x \mathbb{1}_{(0, 1)}(x), \theta > 1$$

Responda os itens

- Encontre uma estatística suficiente e completa para  $\theta$ .
  - Encontre  $\tau(\theta)$  de sorte que o  $LICR(\tau(\theta))$  seja atingido para algum e.n.v. de  $\tau(\theta)$ .
  - Calcule a variância do ENVUM que você encontrou no item b).
10. Seja  $X_1, \dots, X_n$  uma a.a. de  $X$ , cuja distribuição é dada por

$$f_X(x; \boldsymbol{\theta}) = \frac{\alpha}{x^{\alpha+1}} \beta^\alpha \mathbb{1}_{(\beta, \infty)}(x), \boldsymbol{\theta} = (\alpha, \beta), \alpha, \beta > 0$$

- a) Obtenha uma estatística suficiente para  $\theta$
- b) Encontre os e.m.m de  $\alpha$  e  $\beta$ .
- c) Para  $\beta$  conhecido obtenha o e.m.v. de  $\alpha$ . Calcule suas respectivas esperança e variância.
- d) Para  $\alpha$  conhecido obtenha o e.m.v. de  $\beta$ . Calcule suas respectivas esperança e variância.
- e) Para  $\beta$  conhecido prove que a f.d.p. conjunta da amostra pertence à família exponencial.
- f) Para  $\beta$  conhecido, encontre o ENVUM para  $\tau(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$  e calcule sua respectiva variância.
- g) Para ambos os parâmetros desconhecidos, obtenha os e.m.v para  $\alpha$  e  $\beta$ .