ME 705 A - Inferência Bayesianam
Primeiro semestre de 2012
Lista de Exercícios V

OBS: A menos que o contrário seja mencionado, nos exercícios você deve considerar uma amostra aleatória $X_1|\theta, ..., X_n|\theta$ de $X|\theta$.

OBS: A menos que o contrário seja mencionado, a esperança, vício, variância e EQM do estimador Bayesiano devem ser calculados sob a ótica frequentista.

1. Resolva todos os exerícios deixados em sala.

2. Deduza os resultados apresentados, para comparação de médias e de variâncias, nos exemplos com duas populações normais independentes.

3. Seja um vetor aleatório (X, Y) que possui distribuição conjunta normal inversa-gama, ou seja $(X, Y) \sim NIG(\alpha, \nu, r, \gamma)$. Em outras plavras:

$$\begin{aligned} X|y &\sim N(\alpha, y/\nu) \\ Y &\sim IG(r, \gamma) \end{aligned}$$

   Responda os itens:

   a) Escreva a densidade conjunta e encontre a distribuição marginal de X.
   b) Calcule a esperança e variância de X, usando a distribuição condicional de $X|y$ e as relações entre aqueles momentos e os momentos condicionais.
   c) Encontre a distribuição condicional de $Y|x$

4. Seja $X|\boldsymbol{\theta} \sim N(\mu, \sigma^2), \boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma^2)$, com ambos os parâmetros desconhecidos. Responda os itens:

   a) Obtenha a priori de Jeffreys para $\boldsymbol{\theta}$ e as posterioris marginais sob essa priori. A priori e/ou as posterioris são próprias?
   b) Obtenha EAP, MAP, MeAP e VAP de cada parâmetro.

5. Seja $X|r \sim$ Weibull(r, λ), λ conhecido. Sua fdp é dada por

$$p(x|r) = \frac{r}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{r-1} e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^r} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$$

   Responda os itens:

   a) Obtenha a priori de Jeffreys para r e a respectiva posteriori. A priori e/ou a posteriori são próprias?
   b) Assum a priori que $p(r) \propto r^{\alpha-1} e^{-r/\delta} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(r)$. Encontre a respectiva posteriori.

c) Implemente no R, usando a função “integrate”, uma algoritmo para obter uma aproximação numérica para as posterioris dos itens a), b).

d) Implemente no R, usando a função “integrate”, algoritmos para obter aproximações numéricas para o EAP, e o EPAP, para cada uma das posterioris dos itens a), b).

e) Implemente no R, usando a função “optim”, algoritmos para obter aproximações numéricas para o MAP e o MeAP, para cada uma das posterioris dos itens a), b).

f) Implemente no R, usando a função “integrate”, um algoritmo para obter uma aproximação numérica para o fator de Bayes para testar as hipóteses $H_0 : r \leq r_0$ vs $H_1 : r > r_0$, r_0 conhecido, para cada uma das posterioris dos itens a), b).

g) Considere as hipóteses $H_0 : r = r_0$ vs $H_1 : r \neq r_0$, r_0 conhecido. Assuma à priori que:

$$p(r) = \left[\gamma \mathbb{1}_{\{r_0\}}(r) + (1-\gamma)p_1(r)\mathbb{1}_{\Theta_1}(r)\right], \Theta_1 = (0,\infty) - r_0,$$

quem que $p_1(r)$ é a priori dada no item b). Implemente no R, usando a função “integrate”, um algoritmo para obter uma aproximação numérica para o fator de Bayes para testar as hipóteses em questão.

6. Considere o modelo de regressão probito usual e os dados sobre a idade de ocorrência de menarca de garotas de Varsóvia (arquivo meninas.dat). Assumindo prioris do tipo $\beta_i \sim N(0, 10^6)$, independentes, implemente no WinBUGS o ajuste Bayesiano do modelo de regressão logístico com distribuição binomial. Ou seja $Y_i|p_i \sim$ Binominal(m_i, p_i), m_i : é o número de garotas entrevistadas com idade i, Y_i : é o número de meninas que já apresentaram menarca com idade i e $logito(p_i) = \beta_0 + \beta_1(x_i - \overline{x}), \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, n = 25$ e x_i : é a idade média do grupo i. Comente sobre a convergência do algoritmo, o comportamento das distribuições à posteriori, e sobre a significância dos parâmetros do modelo. Não se esqueça de fornecer estimativas pontuais, os desvios-padrão à posteriori e intervalos de credibilidade. O aumento na probabilidade de menarca aumenta, substancialmente, com o aumento em uma ano na idade média? Para mais detalhes veja as páginas 235 e 236 do livro do Prof. Gilberto Paul, Modelos de Regressão com apoio computacional:

`http://www.ime.usp.br/~giapaula/texto_2010.pdf`

7. Considere o modelo de regressão de Poisson usual (com função de ligação log) e os dados de número de clientes de uma determinada loja (varável resposta) e a distância até a loja mais próxima em milhas (variável explicativa) de 110 áreas de uma determinada cidade (arquivo store.dat). Utilize a variável explicativa centrada na média amostral dela. Considere a primeira e a última colunas do arquivo store.dat. Assumindo prioris do tipo $\beta_i \sim N(0, 10^6)$, independentes, implemente no WinBUGS o ajuste Bayesiano do modelo. Comente sobre a convergência do algoritmo, o comportamento das distribuições à posteriori, e sobre a significância dos parâmetros do modelo. Não se esqueça de fornecer estimativas pontuais, os desvios-padrão à posteriori e intervalos de credibilidade. O aumento no número de clientes aumenta, substancialmente, com o aumento em uma milha na distância até a loja mais próxima?