

ME - 210 C Probabilidade I
Primeiro semestre de 2024
Lista de exercícios IV

1. Seja $X \sim Poisson(2)$, calcule as seguintes probabilidades:
 - a) $P(X = 1)$
 - b) $P(X \geq 5)$
 - c) $P(X \leq 2)$
 - d) $P(1 \leq X \leq 3)$
2. Jogamos um dado honesto e em seguida lançamos uma moeda honesta o mesmo número de vezes do número indicado na face superior do dado. Defina a v.a.d X_i o número de caras observadas dado que observamos a face de número i no dado.
 - a) Qual a distribuição de X_i (para um i fixado)?
 - b) Qual a probabilidade de se obter 4 caras?
 - c) Dado que foram obtidas 4 caras, qual a probabilidade de que o número da face superior do dado tenha sido 5?
3. Seja $X \sim geométrica(p)$. Defina uma v.a.d $Y = X - 1$. Encontre a distribuição de Y , sua esperança e variância. O que representa a v.a. Y no contexto da distribuição geométrica.
4. Seja $X \sim BN(r, p)$. Defina uma v.a.d $Y = X - r$. Encontre a distribuição de Y , sua esperança e variância. O que representa a v.a. Y no contexto da distribuição Binomial negativa.
5. Seja $X \sim Poisson(\lambda)$ e considere que $P(X \geq 0) = p, p \in (0, 1)$. Encontre λ em função de p .
6. Seja $X \sim exp(\lambda), \lambda \in \mathbb{R}^+$. Prove a propriedade da falta de memória, ou seja:

$$P(X > i + j | X > j) = P(X > i), \forall i, j \geq 0$$

7. Seja $X \sim N(10, 4)$. Responda dos itens:
- Calcule $P(X \leq 6)$, $P(X \geq 8)$, $P(2 \leq X \leq 6)$, $P(0 \leq X \leq 5)$
 - Obtenha o ponto z , de sorte que (para cada uma): $P(X \leq z) = 0,1788$ e $P(X \geq z) = 0,7005$
8. Seja $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ e admita que $P(X \leq 5) = 0,9987$ e $P(X \geq 3) = 0,1587$. Obtenha μ e σ^2 .
9. Resolva a questão 12 da Lista II utilizando variáveis aleatórias.
10. Seja $X \sim \text{Bernoulli}(p)$, $p \in (0, 1)$:
- Prove que $\mathcal{E}(X)^k = p \forall k \in \mathbb{N}$
 - Qual a probabilidade das raízes da equação $y^2 + yX + X + 1$ serem reais e distintas? E reais e iguais?
11. Seja X uma v.a.c. de sorte que $f_X(x) = (1/2)(\theta \mathbb{1}_{(0,1)}(x) + \mathbb{1}_{[1,2]}(x) + (1 - \theta) \mathbb{1}_{(2,3)}(x))$. Responda:
- Para que valores de θ f_X é de fato uma f.d.p.
 - Encontre a F_X correspondente e a escreva em termos de funções indicadoras.
 - Calcule $E(X)$ e $Var(X)$.
12. Seja X uma v.a.d., tal que $f_X(x) = \frac{e^{-\lambda x}}{x!(1-e^{-\lambda})}$, $\mathbb{1}_{\{1,2,\dots\}}(x)$:
- Prove que f_x de fato é uma f.d.p.
 - Calcule $E(X)$ e $Var(X)$ através de suas definições.
13. Uma v.a.c. tem distribuição Weibull de parâmetros $(a,b) > 0$ (denota-se $X \sim \text{Weibull}(a,b)$), se sua f.d.p. é da forma (dica: para esse exercício, usa a função gama vista em sala):

$$f_X(x) = abx^{b-1}e^{-ax^b} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x).$$

- Prove que f_X é de fato uma densidade.
- Calcule a f.d.a de X .

- c) Calcule $E(X^k)$, $k > 0$, $Var(X)$, $Mo(X)$ e $Md(X)$.
14. Definição. Se Z é uma v.a.d sua moda é definida como sendo o valor, digamos x_{Mo} , tal que $P(X = x_{Mo}) > P(X = x), \forall x \neq x_{Mo}$. Se $X \sim \text{geométrica}(p)$ encontre sua moda.
15. Definição. Se X é uma v.a.d sua mediana é definida como sendo o valor, digamos x_{Md} , tal que $P(X \leq x_{Md}) \geq 1/2$ e $P(X \geq x_{Md}) \geq 1/2$. O que representa, então, a mediana, em termos da distribuição de X .
16. Pesquise sobre a distribuição Hipergeométrica bem como sobre o cálculo de sua esperança e variância no livro do Sheldon Ross.