ME - 210 C Probabilidade I
Primeiro semestre de 2024
Lista de exercícios III

1. Considere o lançamento de dois dados honestos. Denote X_i como sendo o número da face voltada para cima no laçamento do i-ésimo dado, $i = 1, 2$. Encontre a função de probabilidade, média e variância das seguintes variáveis aleatórias:

   a) X_i, i = 1, 2.
   b) $max\{X_1, X_2\}$.
   c) $|X_1 - X_2|$.
   d) $X_1 + X_2$.

2. Considere a retirada (sem reposição) de três bolas de uma urna que contém 15 bolas, numeradas de 1 a 15. Defina X (Y): o maior (menor) número retirado. Encontre a função de probabilidade de X e de Y, bem como as respectivas médias e variâncias.

3. Repita a questão anterior, considerando que a retirada é feita com reposição.

4. Seja $X \sim Binomial(5, 2/3)$. Calcule:

   a) $P(X = 3)$.
   b) $P(X \geq 4)$.
   c) $P(X \leq 1)$.
   d) $P(2 \leq X \leq 4)$.

5. Considere o experimento aleatório que consiste em jogar uma moeda honesta. Se a face observada for “cara”, retiram-se duas bolas, consecutivamente, de uma urna que contem 3 bolas brancas e 2 azuis, caso contrário (face observada “coroa”), retira-se duas bolas, consecutivamente, de uma urna que contem 1 bola branca e 3 azuis. Defina uma variável aleatória X que representa o número de bolas azuis observadas. Calcule a distribuição, esperança, variância, desvio-padrão e coeficiente de variação de X quando:

   a) As retiradas forem sem reposição.
   b) As retiradas forem com reposição.

6. Repita o exercício anterior, considerando que a amostragem é feita com reposição mas, adicionamos uma outra bola (da mesma cor daquela retirada da primeira vez) antes da segunda retirada.

7. Seja X uma v.a.c tal que sua f.d.p é dada por $f_X(x) = 6x(1-x)\mathbb{1}(x)_{[0,1]}$. Responda os itens:

   a) Prove que $f_X(x)$ é de fato uma f.d.p (contínua).
   b) Calcule a f.d.a de X e a escreva utilizando funções indicadoras.
   c) Calcule a média e a variância de X.

8. Seja $X \sim G(p), p \in (0,1)$. Prove que:

$$P(X \geq i + j | X \geq j) = P(X \geq i), \forall i, j = 0, 1, 2, \ldots$$

9. Verique que as funções abaixo são legítimas f.d.a's e encontre as respectivas f.d.p.'s associadas.

   a) $F_X(x) = \frac{1}{4}\mathbb{1}_{[1,2)}(x) + \frac{3}{4}\mathbb{1}(x)_{[2,3)} + \mathbb{1}(x)_{[3,\infty)}$
   b) $F_X(x) = e^{e^{-x}}\mathbb{1}_{[0,\infty)}$.
   c) $F_X(x) = (1 - e^{-x^k})\mathbb{1}_{[0,\infty)}, k > 0$ (k é apenas uma constante).
   d) $F_X(x) = \left(1 - \frac{1}{x^a}\right)\mathbb{1}(x)_{[1,\infty)}, a > 0$ (a é apenas uma constante).
   e) $F_X(x) = (1 - (1-p)^{x+1})\mathbb{1}(x)_{[0,\infty)} p > 0$ (p é apenas uma constante e neste caso, X é uma v.a.d.).

10. Sejam H, G duas f.d.a's. Prove que $F(x) = pG(x) + (1-p)H(x)$ é, de fato, uma f.d.a., em que $p \in (0,1)$.

11. Considere uma caixa com B bolas brancas e $(N - B)$ bolas azuis e o experimento que consiste em retirar uma amostra aleatória sem reposição de n bolas dessa caixa. Defina a seguinte variável aleatória X: o número de bolas brancas observadas na amostra de tamanho n. Responda os itens:

    a) Qual o espaço amostral e a $\sigma-$ álgebra associadas a esse experimento?
    b) A v.a. X é discreta ou contínua? Justifique, adequadamente, sua resposta.
    b) Obtenha a f.d.p da v.a X.

12. Dizemos que uma v.a.d. X tem distribuição logaritmica de parâmetro p, $p \in (0,1)$ (notação: $X \sim \text{logaritmica}(p)$) se sua f.d.p é dada por $f_X(x) = P(X = x) = \dfrac{q^x}{-x\ln(p)} \mathbb{1}_{\{1,2,\dots\}}(x)$. Calcule o valor esperado e a variância de X.

13. Exercícios do Sheldon Ross:

    a) Página 163 (problemas): 17, 28, 57.
    b) Página 169 (theoretical exercises): 8.
    c) Página 212 (problemas): 1, 14 .
    c) Página 214 (theoretical exercises): 1, 9 .

14. Prove que se X é uma v.a.d ou uma v.a.c então $V(aX \pm b) = a^2 V(X)$, a, b constantes.