ME - 402 Inferência Estatística
Segundo semestre de 2010
Lista de exercícios III

1. Seja $X_1, ..., X_n$ uma a.a. de X, X $\sim U(\theta, \theta + \alpha), \theta \in (0, \infty), \alpha \in (0, \infty)$(conhecido). Responda os itens.

   a) Prove que $\boldsymbol{T} = (Y_1, Y_n)$ é uma estatística suficiente e minimal para θ, em que $Y_1 = min(X_1, ..., X_n)$ e $Y_n = max(X_1, ..., X_n)$.

   b) Calcule a distribuição do vetor $\boldsymbol{T}$. Lembre-se de que, a distribiução conjunta de (Y_1, Y_n) de uma a.a de tamanho n de uma v.a.c X é dada por,

   $$f_{Y_1,Y_n}(y_1, y_n) = n(n-1)[F_X(y_n) - F_X(y_1)]^{n-2} f_X(y_1) f_X(y_n) I_{(y_1 < y_n)}$$

   em que F_X é a f.d.a de X e f_X é a f.d.p de X.

   c) Defina $R = Y_n - Y_1$ e $M = \frac{Y_1+Y_n}{2}$, calcule a distribuição conjunta de (R, M) através do método do Jacobiano e obtenha a distribuição marginal de R. A estatística R é ancilar para θ?

   d) Calcule $\mathcal{E}(R)$ usando a distribuição de R e usando as distribuições marginais de Y_1 e Y_n.

   e) Usando a estatística R prove que a estatística $\boldsymbol{T}$ não é completa.

2. Seja $X_1, ..., X_n$ uma a.a. de X, X $\sim U\{1, 2, ..., \theta\}, \theta \in \mathcal{N}^*$. Responda os itens.

   a) Prove que $Y_n = max(X_1, ..., X_n)$ é uma estatística suficiente e minimal para θ.

   b) Encontre a f.d.p de Y_n e prove que Y_n é uma estatística completa.

   c) Calcule a $\mathcal{E}(Y_n)$ e $\mathcal{V}ar(Y_n)$

3. Para as distribuições dos itens a), b), c), d), e), da Questão 2 da Lista II, calcule a esperança e a variância das estatísticas suficientes e completas que você encontrou.

4. Considerando uma a.a. $X_1, ..., X_n$ de X, para cada uma das distribuição abaixo, obtenha os estimadores pelo método dos momentos de $\boldsymbol{\theta}$.

   a) $X \sim Bernoulli(\theta), \boldsymbol{\theta} = \theta$.

b) $X \sim Gama(r, \lambda), \boldsymbol{\theta} = (r, \lambda)$.

c) $X \sim Beta(a, b), \boldsymbol{\theta} = (a, b)$.