ME 705 A - Inferência Bayesianam
Primeiro semestre de 2012
Lista de Exercícios III

OBS: A menos que o contrário seja mencionado, nos exercícios você deve considerar uma amostra aleatória $X_1|\theta, ..., X_n|\theta$ de $X|\theta$.

OBS: A menos que o contrário seja mencionado, a esperança, vício, variância e EQM do estimador Bayesiano devem ser calculados sob a ótica frequentista.

1. Resolva os exercícios deixados em sala.
2. Para as questões da Lista I: 2, 3, 4, 6, 7, considere as prioris da Lista I e a priori de Jeffreys, resolva os itens a seguir:
   a) Construa IC_B γ (de credibilidade γ) para os parâmetros de interesse, através da distribuição a posteriori obtida e através de alguma das quatro distribuições mencionadas em sala (normal, t de Student, qui-quadro ou F de Snedcor).
   b) Mostre como obter intervalos HPD para os parâmetros de interesse e implemente o respectivo programa em R. Lembre-se que os HPD's, quase sempre, não são invariantes à transformações não-lineares.
   c) Em cada uma das situações consideradas nos itens a e b, simule valores para as variáveis de interesse, considerando diferentes: tamanhos de amostra e valores do parâmetro de interesse. Compare os comprimentos dos IC_B e HPD obtidos para diferentes valores de γ.
   d) Obtenha as distribuições preditivas à posteriori, para todas as questões mencionadas.
3. Use os resultados obtidos no item 2) desta Lista e calcule IC_B e HPD para as Questões 5 e 11 da Lista I.
4. Para as questões da Lista I: 2, 3, 4, 6, 7, considere o interesse em testar hipóteses de tipo $H_0 : \theta \in \Theta_0$ vs $\theta \in \Theta_1$, em que $\Theta = \Theta_0 \bigcup \Theta_1$, Θ_0 e Θ_1 são disjuntos. Se Θ for um conjunto não enumerável, considere que Θ_0 e Θ_1 também o são. Responda os itens:
   a) Obtenha $O(H_1, H_0)$, $O(H_1, H_0|\boldsymbol{x})$ e o fator de Bayes.
   b) Obtenha o fator de Bayes considerando agora hipóteses do tipo $H_0 : \theta < \theta_0$ vs $H_1 : \theta \geq \theta_0$.
5. Com relação as situações da Questão 4 desta lista, considere o interesse em se testar hipóteses do tipo $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta \neq \theta_0$ e prioris da forma $p(\theta) = \gamma \mathbb{1}_{\{\theta_0\}}(\theta) + (1-\gamma)p_1(\theta)\mathbb{1}_{(\Theta - \{\theta_0\})}(\theta)$, em que $p_1(.)$ são as prioris utilizadas nas respectivas questões. Obtenha $O(H_1, H_0)$, $O(H_1, H_0|\boldsymbol{x})$ o fator de Bayes.
6. Resolva os itens 2 a 5 considerando agora os Exemplos vistos em sala de aula, desde que eles não coincidam com os exercícios da Lista I mencionados.
7. Resolva os itens 2 a 5 considerando agora as questões 4 e 5, da Lista II e para o exemplo visto em classe da normal univariada (considerando os dois paramêtros desconhecidos), para cada um dos parâmetros em separado. Como ficaria o fator de Bayes se as hipóteses fossem para todos os parâmetros simultaneamente, ou seja $H_0 : \theta_i = \theta_{i0}$ vs $H_1 : \theta_i \neq \theta_{i0}, i = 1, 2, ..., p$.

8. Considere uma única observação da distribuição binomial bivariada, ou seja:

$$f(r,s|\gamma,\phi) = \left(\begin{array}{c} m \\ r \end{array} \right) \gamma^r (1-\gamma)^{m-r} \left(\begin{array}{c} r \\ s \end{array} \right) \phi^s (1-\phi)^{r-s} \mathbb{1}_{\{0,1,\ldots,m\}}(r) \mathbb{1}_{\{0,1,\ldots,r\}}(s), \gamma, \phi \in (0,1)^2$$

Responda os itens:

a) Determine a família conjugada natural para o o modelo.
b) Obtenha os emv de (γ, ϕ).
c) 0btenha a priori de Jeffreys e mostre que ela coincide com a priori de Jeffreyus sob independência.
d) Obtenha as posterioris conjunta e as marginais, sob cada uma das prioris acima.

9. Considere uma única observação da distribuição Binomial-Poisson, ou seja:

$$f(x,y|\gamma,\phi) = \left(\begin{array}{c} y \\ x \end{array} \right) \gamma^x (1-\gamma)^{y-x} e^{-\phi} \frac{\phi^y}{y!} \mathbb{1}_{\{0,1,2,\ldots\}}(y) \mathbb{1}_{\{0,1,\ldots,y\}}(x), \gamma \in (0,1), \phi \in \mathcal{R}^+$$

Responda os itens:

a) Determine a família conjugada natural para o o modelo.
b) Obtenha os emv de (γ, ϕ).
c) 0btenha a priori de Jeffreys e mostre que ela coincide com a priori de Jeffreyus sob independência.
d) Obtenha as posterioris conjunta e as marginais, sob cada uma das prioris acima.