

ME - 210 C Probabilidade I
Primeiro semestre de 2024
Lista de exercícios II

1. Sejam A , B e C três eventos definidos em um mesmo espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{A}, P) .
Expresse os eventos abaixo em termos de A , B e C :
 - i) Apenas o evento A ocorre;
 - ii) Apenas um dos três eventos ocorre;
 - iii) A e C ocorrem, mas B não ocorre;
 - iv) Nenhum dos três eventos ocorre;
 - v) Pelo menos um dos três eventos ocorre;
 - vi) No máximo um dos três eventos ocorre;
 - vii) Pelo menos dois dos três eventos ocorre.
2. Exercícios do Ross, S. (2012) *A First Course in Probability*, ninth edition:
 - a) Página 48 (problemas): 1, 5, 6, 8, 12, 19, 23, 27, 28, 44.
 - b) Página 52 (exercícios teóricos): 13, 19.
 - c) Página 54: (“self-test problems and exercises”): 2, 6.
 - d) Página 97: (problemas): 1, 5, 6, 8, 12, 19, 23, 27, 28, 44, 66.
 - e) Página 106: (exercícios teóricos): 6, 15.
 - f) Página 109: (“self-test problems and exercises”): 8, 30.
3. Calcule a probabilidade que dois lançamentos de três dados resultem na mesma configuração quando os dados são:
 - a) Distinguíveis.
 - b) Indistinguíveis.
4. Um homem bêbado tem um molho com n chaves e apenas uma abre a porta da sua casa.
 - a) Se ele escolhe aleatoriamente, porém sem considerar a mesma chave mais de uma vez (i.e., ele não está muito bêbado), qual a probabilidade que ele consiga abrir a porta na k -ésima tentativa, $k = 1, \dots, n$?

- b) Responda ao item i), considerando que ele está muito bêbado (ou seja, ele pode selecionar a mesma chave mais de uma vez).
5. Sejam n bolas distribuídas aleatoriamente em r urnas distinguíveis, sem restrições no número de bolas por urna. Encontre a probabilidade:
- Exatamente k bolas nas primeiras s urnas, ($s \leq r$).
 - Exatamente uma urna vazia.
 - Exatamente s , ($s \leq r$) urnas vazias.
6. Considere uma urna contendo B bolas brancas e A bolas azuis. Seja o experimento de retirar uma bola dessa urna, observar a sua cor e devolver essa bola com outra da mesma cor. A seguir, seleciona-se uma segunda bola dessa urna e também observa-se a sua cor. Considere que todas as bolas, independentemente de sua cor, têm a mesma probabilidade de serem retiradas. Responda os itens abaixo:
- Descreva o espaço amostral associado ao experimento aleatório bem como a σ -álgebra gerada por ele.
 - Qual a probabilidade da primeira bola ser branca?
 - Qual a probabilidade da segunda bola ser branca?
 - Qual a probabilidade das duas bolas serem brancas?
 - Qual a probabilidade da segunda bola ser branca dado que a primeira é azul?
 - Qual a probabilidade da primeira bola ser azul dado que a segunda é branca?
 - Qual a probabilidade de pelo menos uma das bolas ser branca?
7. Se $(\Omega; \mathcal{A}; P_1)$ e $(\Omega; \mathcal{A}; P_2)$ são espaços de probabilidades e $0 < \alpha < 1$, mostre que $(\Omega; \mathcal{A}; \alpha P_1 + (1 - \alpha)P_2)$ é também um espaço de probabilidade.
8. Sejam A e B dois eventos definidos em um espaço mensurável (Ω, \mathcal{A}) . Considere uma medida de probabilidade P definida no espaço mensurável em questão. Mostre que
- $$\max\{0, P(A) + P(B) - 1\} \leq P(A \cap B) \leq \min\{P(A), P(B)\}.$$
9. Jogamos um dado honesto e em seguida lançamos uma moeda honesta o mesmo número de vezes do número indicado na face superior do dado. Responda os itens abaixo:
- Qual a probabilidade de obter 4 caras?

- b) Dado que foram obtidas 4 caras, qual a probabilidade de que o número da face superior do dado tenha sido 5?
10. Um experimento consiste em lançar duas vezes uma moeda honesta. Considere os seguintes eventos:
- A = O primeiro resultado resulta em cara
B = O segundo lançamento resulta em cara
C = O resultado do primeiro lançamento coincide com o resultado do segundo lançamento.
Mostre que A, B e C são independentes dois a dois, porém não são independentes.
11. Meu professor de xadrez quer me convencer a não abandonar meus estudos nesta modalidade. Para tanto, ele me oferece um bom cheque, a ser depositado na minha conta bancária, se eu ganhar pelo menos duas partidas seguidas em uma série de três, jogando com ele e com Kasparov, que é um mestre conhecedor de xadrez. Kasparov joga melhor que o meu professor. Ele (meu professor) diz que eu posso escolher a sequência de três partidas, onde eu devo ganhar duas seguidas. Eu posso escolher (jogar com ele, Kasparov e ele) ou (jogar com Kasparov, ele e Kasparov). E agora, qual sequência maximiza a chance de eu ganhar o cheque? A resposta é surpreendente? Justifique.
12. Três jogadores A, B e C se revezam em um jogo honesto de acordo com as seguintes regras. No início A e B jogam e C fica de fora. O perdedor é substituído por aquele que estava fora e assim sucessivamente. O jogo continua desta forma até que o mesmo jogador ganhe duas vezes consecutivas, sendo então declarado vencedor. Qual a probabilidade que:
- a) A vença?
b) C vença?
c) Uma decisão ocorra na k-ésima rodada ou antes?