ME 705 A - Inferência Bayesiana
Primeiro semestre de 2023
Lista de Exercícios II

OBS:

- A menos que o contrário seja mencionado, nos exercícios você deve considerar uma amostra aleatória $X_1|\theta, ..., X_n|\theta$ de $X|\theta$.
- A menos que o contrário seja mencionado, variância do estimador Bayesiano deve ser calculada sob a ótica frequentista.
- Sempre construa gráficos das posteriores (para valores específicos dos hiperparâmetros e para alguma amostra). Caso tais valores não sejam fornecidos, escolha-os, usando algum critério.

1. Resolva os exercícios deixados em sala.
2. Para as Questões 2, 3, 4, 6 e 12, da Lista I, obtenha a priori de Jeffreys. Verifique, em cada um dos casos, se a priori é própria.
3. Em relação à Questão anterior, obtenha, se possível, a posteriori, e verifique se ela é própria.
4. Seja $\boldsymbol{X}|\boldsymbol{\theta} \sim \text{Trinomial}(n, \theta_1, \theta_2), \theta_i \in (0,1), 0 \leq \theta_1 + \theta_2 \leq 1$, (considere apenas uma única observação), n conhecido. Responda os itens.
   a) Determine a família conjugada natural para o o modelo em questão.
   b) Obtenha as prioris de Jeffreys (PJ) e a priori de Jefrreys sob independência (PJI). Para a PJI, verifique se ela é própria.
   c) Para cada uma das 3 prioris obtidas anteriormente, obtenha, se possível, as posteriores. Verifique se elas são próprias.
   d) Para cada uma das posterioires obtidas anteriormente, obtenha o EAP e o VAP.
5. Seja $\boldsymbol{X}|\boldsymbol{\mu} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, $\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{R}^p$, $\boldsymbol{\Sigma}$ conhecida. Responda os itens.
   a) Determine a família conjugada natural para o o modelo em questão.
   b) Obtenha as prioris de Jeffreys (PJ) e a priori de Jefrreys sob independência (PJI). Para a PJI, verifique se ela é própria.
   c) Para cada uma das 3 prioris obtidas anteriormente, obtenha, se possível, as posteriores. Verifique se elas são próprias.
   d) Para cada uma das posterioires obtidas anteriormente, obtenha o EAP e o DPAP.
6. Considere uma única observação da seguinte fdp

$$f_{X|\theta}(x|\theta) = \frac{\theta}{2}\mathbb{1}_{\{-1\}}(x) + \frac{1}{2}\mathbb{1}_{\{0\}}(x) + \frac{1-\theta}{2}\mathbb{1}_{\{1\}}(x), \theta \in (0,1),$$

e assuma $p(\theta) = \dfrac{1}{\beta(a,b)}\theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1}\mathbb{1}_{(0,1)}(\theta)$. Responda os itens:

a) Encontre a distribuição a posteriori (para cada valor de X).

b) Obtenha $\widehat{\theta}_{EAP}$, $\widehat{\theta}_{Mo}$ e $\widehat{\theta}_{Md}$ e suas respectivas variâncias (frequentistas).

c) Obtenha o desvio-padrão à posteriori.

7. Seja $X|\theta$, tal que

$$f_{X|\theta}(x|\theta) = \theta(1-x)^{\theta-1}\mathbb{1}_{(0,1)}(x), \theta \in \{\theta_0, \theta_1\}, \theta_i \in (0,1), i = 1,2$$

a) Proponha uma priori apropriada para θ e, com base nela, encontre a posteriori.

b) Obtenha $\widehat{\theta}_{EAP}$, $\widehat{\theta}_{Mo}$ e $\widehat{\theta}_{Md}$ e suas respectivas variâncias.

c) Obtenha o desvio-paddrão à posteriori.

8. Prove que o estimador de Bayes, considerando a perda quadrática, corresponde ao estimador EAP.

9. Um sistema analítico que auxilia na determinação do tipo de sangue, segundo o grupo ABO, consite na observação em cada pessoa de uma variável aleatória X com a seguinte densidade

$$p(x|\theta) = e^{-(x-\theta)}\mathbb{1}_{(\theta,\infty)}(x)$$

A classificação em cada tipo de sangue depende do valor de θ segundo a seguinte definição:

$$\begin{aligned} 0 < \theta < 1 &\rightarrow AB \\ 1 \leq \theta < 2 &\rightarrow A \\ 2 \leq \theta < 3 &\rightarrow B \\ \theta \geq 3 &\rightarrow BO \end{aligned}$$

Responda os itens, considerando apenas uma única observação de X e $p(\theta) = e^{-\theta}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(\theta)$:

a) Determine a probabilidade à priori de uma pessoa escolhida ao acaso ter cada um dos tipos de sangue.

b) Determine a probabilidade a posteriori de uma pessoa, escolhida ao acaso, que apresentou x=4, ter cada um dos tipos de sangue.

10. Considere uma única observação da distribuição binomial bivariada, ou seja:

$$f(r,s|\gamma,\phi) = \begin{pmatrix} m \\ r \end{pmatrix}\gamma^r(1-\gamma)^{m-r}\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}\phi^s(1-\phi)^{r-s}\mathbb{1}_{\{0,1,\ldots,m\}}(r)\mathbb{1}_{\{0,1,\ldots,r\}}(s), \gamma,\phi \in (0,1)^2$$

Responda os itens:

a) Prove que verossimilhança é separável

b) Determine a família conjugada natural para o o modelo.

c) Obtenha os emv de (γ, ϕ).

d) Obtenha a priori de Jeffreys e mostre que ela coincide com a priori de Jeffreys sob independência.

e) Obtenha as posterioris conjunta e as marginais, sob cada uma das prioris acima.

f) Para cada parâmetro, obtenha o EAP, MAP e DPAP.

11. Considere uma única observação da distribuição Binomial-Poisson, ou seja:

$$f(x,y|\gamma,\phi) = \binom{y}{x} \gamma^x (1-\gamma)^{y-x} e^{-\phi} \frac{\phi^y}{y!} \mathbb{1}_{\{0,1,2,\ldots\}}(y) \mathbb{1}_{\{0,1,\ldots,y\}}(x), \gamma \in (0,1), \phi \in \mathcal{R}^+$$

Responda os itens:

a) Prove que verossimilhança é separável

b) Determine a família conjugada natural para o o modelo.

c) Obtenha os emv de (γ, ϕ).

d) Obtenha a priori de Jeffreys e mostre que ela coincide com a priori de Jeffreyus sob independência.

e) Obtenha as posterioris conjunta e marginais, sob cada uma das prioris acima.

f) Para cada parâmetro, obtenha o EAP, MAP e DPAP.

12. Do livro Estatística Bayesiana, segunda edição: Questões 1. 1.1, 1.3, 1.6, 2.6, 2.11, 2.15