

ME 705 A - Inferência Bayesianam
Primeiro semestre de 2012
Lista de Exercícios II

OBS: A menos que o contrário seja mencionado, nos exercícios você deve considerar uma amostra aleatória $X_1|\theta, \dots, X_n|\theta$ de $X|\theta$.

OBS: A menos que o contrário seja mencionado, variância do estimador Bayesiano deve ser calculada sob a ótica frequentista.

1. Resolva os exercícios deixados em sala.
2. Para as Questões 2, 3, 4 e 6, da Lista I, obtenha a priori de Jeffreys. Verifique, em cada um dos casos, se a priori é própria.
3. Em relação à Questão anterior, obtenha, se possível, a posteriori, e verifique se ela é própria.
4. Seja $\mathbf{X}|\boldsymbol{\theta} \sim \text{Trinomial}(n, \theta_1, \theta_2), \theta_i \in (0, 1), 0 \leq \theta_1 + \theta_2 \leq 1, n$ conhecido. Responda os itens.
 - a) Determine a família conjugada natural para o o modelo em questão.
 - b) Obtenha as prioris de Jeffreys (PJ) e a priori de Jefreys sob independência (PJI). Para a PJI, verifique se ela é própria.
 - c) Para cada uma das 3 prioris obtidas anteriormente, obtenha, se possível, as posteriores. Verifique se elas são próprias.
 - d) Para cada uma das posteriores obtidas anteriormente, obtenha o EAP e o VAP.
5. Seja $\mathbf{X}|\boldsymbol{\mu} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}), \boldsymbol{\mu} \in \mathcal{R}^p, \boldsymbol{\Sigma}$ conhecida. Responda os itens.
 - a) Determine a família conjugada natural para o o modelo em questão.
 - b) Obtenha as prioris de Jeffreys (PJ) e a priori de Jefreys sob independência (PJI). Para a PJI, verifique se ela é própria.
 - c) Para cada uma das 3 prioris obtidas anteriormente, obtenha, se possível, as posteriores. Verifique se elas são próprias.
 - d) Para cada uma das posteriores obtidas anteriormente, obtenha o EAP e o VAP.
6. Considere uma única observação da seguinte fdp

$$f_{X|\theta}(x|\theta) = \frac{\theta}{2} \mathbb{1}_{\{-1\}}(x) + \frac{1}{2} \mathbb{1}_{\{0\}}(x) + \frac{1-\theta}{2} \mathbb{1}_{\{1\}}(x), \theta \in (0, 1)$$

Considere $p(\theta) = \frac{1}{\beta(a,b)} \theta^{a-1} (1-\theta)^{b-1} \mathbb{1}_{(0,1)}(\theta)$. Responda os itens:

- a) Encontre a distribuição a posteriori.

- b) Obtenha $\hat{\theta}_{EAP}$, $\hat{\theta}_{Mo}$ e $\hat{\theta}_{Md}$ e suas respectivas variâncias.
- c) Obtenha a variância à posteriori.

7. Seja $X|\theta$, tal que

$$f_{X|\theta}(x|\theta) = \theta(1-x)^{\theta-1} \mathbb{1}_{(0,1)}(x), \theta \in \{\theta_0, \theta_1\}, \theta_i \in (0, 1), i = 1, 2$$

- a) Proponha uma priori apropriada para θ e, com base nela, encontre a posteriori.
 - b) Obtenha $\hat{\theta}_{EAP}$, $\hat{\theta}_{Mo}$ e $\hat{\theta}_{Md}$ e suas respectivas variâncias.
 - c) Obtenha a variância à posteriori.
8. Prove que o estimador de Bayes, considerando a perda quadrática, corresponde à considerar ao EAP.
9. Seja $X|\boldsymbol{\theta} \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma^2)$. Considere que

$$p(\mu, \sigma^2) \propto \exp^{-\frac{(\mu-\mu_0)^2}{2\psi_0}} e^{-\beta_0/\sigma^2} (\sigma^2)^{-r-\alpha_0} \mathbb{1}_{(\infty, \infty)}(\mu) \mathbb{1}_{(0, \infty)}(\sigma^2)$$

$(\mu_0, \psi_0, \alpha_0, \beta_0)$ conhecidos. Responda os itens

- a) Encontre a distribuição a posteriori conjunta e as marginais.
- b) Encontre EAP, MAP, MeAP e VAP de cada parâmetro.