

ME 731 - Métodos em Análise Multivariada  
Segundo semestre de 2017  
Lista de Exercícios II

1. Resolva todos os exercícios deixados em sala.
2. Considere  $\mathbf{X}_j \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}), j = 1, \dots, n$ , uma amostra aleatória em que  $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$  são ambos desconhecidos. Obtenha a estatística do teste da razão de verossimilhanças (t.r.v.), e sua respectiva distribuição assintótica sob  $H_0$ , para testar  $H_0 : \boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}_0$  vs  $H_1 : \boldsymbol{\Sigma} \neq \boldsymbol{\Sigma}_0$ , em que  $\boldsymbol{\Sigma}_{0(p \times p)}$  é uma matriz conhecida.
3. Utilize o resultado da Questão 2 para testar a referida hipótese considerando  $(\alpha = 5\%)$ , nos seguintes casos:

a)  $\boldsymbol{\Sigma}_0 = \begin{bmatrix} 0,03 & 0 \\ 0 & 0,01 \end{bmatrix}$

b)  $\boldsymbol{\Sigma}_0 = \begin{bmatrix} 0,02 & 0,01 \\ 0,01 & 0,02 \end{bmatrix}$

Utilize as variáveis *Petal.Length* e *Petal.Width* e o grupo *iris setosa* do conjunto de dados “iris”.

O que significa cada hipótese? Para cada item anterior, apresente a matriz de covariâncias estimada, o valor da estatística do teste, o nível descritivo e a respectiva conclusão.

4. Utilize o TRV para testar a igualdade de matrizes de variâncias-covariâncias entre dois grupos, visto em sala de aula, para testar as referidas hipóteses considerando  $(\alpha = 5\%)$ , tendo como população 1, o grupo *iris setosa* e a população 2, o grupo *iris versicolor*. Considere as variáveis *Petal.Length* e *Petal.Width*. Apresente as matrizes de covariâncias estimadas de cada

grupo e a ponderada, o valor da estatística do teste, o nível descritivo e a respectiva conclusão.

5. Considere  $\mathbf{X}_{ij} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}_i, \boldsymbol{\Sigma})$ ,  $i = 1, 2, j = 1, \dots, n_i$ , amostras aleatórias de duas populações independentes, em que  $(\boldsymbol{\mu}_i, \boldsymbol{\Sigma})$ ,  $i = 1, 2$  são ambos desconhecidos. Proponha uma estatística de teste, baseada na forma quadrática

$$T^2 = \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)^{-1} (\bar{\mathbf{X}}_1 - \bar{\mathbf{X}}_2 - \boldsymbol{\Delta})' \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} (\bar{\mathbf{X}}_1 - \bar{\mathbf{X}}_2 - \boldsymbol{\Delta}),$$

para testar as hipóteses  $H_0 : \mathbf{R}(\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2) = \boldsymbol{\Delta}$  vs  $\mathbf{R}(\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2) \neq \boldsymbol{\Delta}$ , em que  $\mathbf{R}_{(c \times p)}$ ,  $c \leq p$  e  $\boldsymbol{\Delta}_{(c \times 1)}$  são matrizes conhecidas de posto linha completo. Encontre sua distribuição exata e mostre como calcular o valor crítico e o nível descritivo associado.

6. Utilize o teste F, para a igualdade de vetores de médias, apresentando em classe para testar as hipóteses  $H_0 : \boldsymbol{\mu}_1 = \boldsymbol{\mu}_2$  vs  $H_1 : \boldsymbol{\mu}_1 \neq \boldsymbol{\mu}_2$ , no conjunto de dados da Iris considerando os grupos setosa e versicolor como grupos 1 e 2, respectivamente (com  $\alpha = 5\%$ ). Considere que  $\boldsymbol{\Sigma}_1 = \boldsymbol{\Sigma}_2 = \boldsymbol{\Sigma}$ . Utilize as variáveis *Petal.Length* e *Petal.Width*. Apresente os vetores de médias estimadas de cada grupo, as matrizes de covariâncias estimadas de cada grupo e a ponderada, o valor da estatística do teste, o nível descritivo e a respectiva conclusão. Caso você tenha rejeitado  $H_0$ , identifique em qual(is) variável(is) reside a diferença, através de alguma metodologia adequada.
7. Utilize o teste de Box, para a igualdade de matrizes de covariâncias, apresentando em classe para testar as hipóteses  $H_0 : \boldsymbol{\Sigma}_1 = \boldsymbol{\Sigma}_2 = \boldsymbol{\Sigma}_3$  vs  $H_1$  : pelo menos uma diferença, no conjunto de dados da Iris considerando os grupos setosa, versicolor e virginica como 1, 2 e 3, respectivamente. Utilize as variáveis *Petal.Length* e *Petal.Width*. Apresente as matrizes de covariâncias estimadas de cada grupo e a ponderada, o valor da estatística do teste, o nível descritivo e a respectiva conclusão. Apresente os vetores

de médias estimadas de cada grupo, o valor da estatística do teste, o nível descritivo e a respectiva conclusão.

8. Utilize a metodologia MANOVA, apresentada em classe, para testar as hipóteses  $H_0 : \boldsymbol{\mu}_1 = \boldsymbol{\mu}_2 = \boldsymbol{\mu}_3$  vs  $H_1$  : pelo menos uma diferença, no conjunto de dados da Iris considerando os grupos setos, versicolor e virginica como 1, 2 e 3, respectivamente.
9. Com relação ao modelo linear multivariado homocedástico, visto em sala, responda os itens:

a) Prove que o e.m.v de  $\mathbf{B}$  é dado por  $\widehat{\mathbf{B}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{Y}$ .

b) Prove que o e.m.v de  $\boldsymbol{\Sigma}$  é dado por  $\widehat{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{1}{n} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\widehat{\mathbf{B}})' (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\widehat{\mathbf{B}})$ .