MI 406 - Análise de Regressão
Segundo semestre de 2016
Lista de Exercícios I

1. Resolva TODOS os exercícios deixados em sala.

2. Revise os conceitos de probabilidade e inferência, em particular a distribuição normal bivariada.

3. Prove que o estimador $\widehat{\beta}_1$ (visto em sala) é o melhor estimador linear não viciado para β_1.

4. Considere o modelo $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \xi_i, i = 1, 2, ..., n$, em que $\xi_i \overset{i.i.d.}{\sim} N(0, \sigma^2)$. Defina $\widehat{Y}_i = \widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_1 x_i$, em que $\widehat{\beta}_j, j = 0, 1$ é o estimador de MQO de $\beta_j, j = 0, 1$ e $\widehat{\xi}_i = Y_i - \widehat{Y}_i$. Prove que:

   a) Nesse caso, os estimadores de MV coincidem com os estimadores de MQO.
   b) $\sum_{i=1}^{n} \widehat{\xi}_i = 0$.
   c) $\sum_{i=1}^{n} x_i \widehat{\xi}_i = 0$.
   d) $\sum_{i=1}^{n} \widehat{Y}_i \widehat{\xi}_i = 0$.

5. Considere o modelo descrito na Questão 4). Coloque-o na forma da família exponencial encontrando uma estatística suficiente, completa e mínima para $\boldsymbol{\theta} = (\beta_0, \beta_1, \sigma^2)$.

6. Considere o modelo descrito na Questão 4) com $\beta_0 = 0$. Proponha um teste exato e um assintótico, ambos baseados na estatística da razão de vereossimilhanças, para testar $H_0 : \beta_1 = \beta$ vs $H_1 : \beta_1 \neq \beta$, em que β é conhecido. Propor um teste significa: constuir uma estatística do teste que faça sentido em termos do problema, apresentar sua distribuição (exata ou assintótica) sob H_0, apresentar as regiões crítica e de aceitação, bem como o p-valor associado. Considere um nível de significância de α

7. Considere o modelo $Y_i = \beta_0 + \beta_1(x_i - \overline{x}) + \xi_i, i = 1, 2, ..., n$, em que $\xi_i \overset{i.i.d.}{\sim} N(0, \sigma^2)$. Encontre a forma escalar dos estimadores de mínimos quadrados ordinários (MQO) de $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1)'$ e as respectivas distribuições marginais. Compare esses estimadores com aqueles obtibos no modelo $Y_i = \alpha_0 + \alpha_1 x_i + \xi_i$. Calcule $\text{Cov}(\widehat{\beta}_0, \widehat{\beta}_1)$ e $\text{Cov}(\widehat{\alpha}_0, \widehat{\alpha}_1)$. O que você pode dizer sobre a independência entre $\widehat{\beta}_0$ e $\widehat{\beta}_1$ e entre $\widehat{\alpha}_0$ e $\widehat{\alpha}_1$?

8. Considere o modelo $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 + \xi_i, i = 1, 2, ..., n$, em que $\xi_i \overset{i.i.d.}{\sim} N(0, \sigma^2)$. Encontre a forma escalar dos estimadores de MQO de $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \beta_2)'$ e as respectivas distribuições marginais. Calcule também $\text{Cov}(\widehat{\beta}_0, \widehat{\beta}_1)$, $\text{Cov}(\widehat{\beta}_0, \widehat{\beta}_2)$ e $\text{Cov}(\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2)$ e comente sobre a independência entre os estimadores 2 a 2.

9. Refaça a questão 6 considerando $x_i = x_i - \overline{x}$.

10. Nas questões de 4, 5 e 6 , proponha um teste para testar $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta \neq \theta_0$, em que θ_0 é um valor conhecido e θ representa cada um dos parâmetros do modelo em questão. Por exemplo, no modelo da questão 4), θ corresponde à β_0, β_1 e β_2. Considere σ^2 conhecido. Propor um teste significa: constuir uma estatística do teste que faça sentido em termos do problema, apresentar sua distribuição (exata ou assintótica) sob H_0, apresentar as regiões crítica e de aceitação, bem como o p-valor associado. Considere um nível de significância de α.

11. Seja $\boldsymbol{A}_{(m\times m)}$ uma matriz real e simétrica (sugestão: utilize a decomposição apresentada na última página dos slides sobre álgebra de matrizes). Mostre que:

    a) $tr(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i$, em que $\lambda_i, i = 1, ..., m$ são os autovalores de $\boldsymbol{A}$.

    b) $det(\boldsymbol{A}) = \prod_{i=1}^{m} \lambda_i$.

    c) Se $\boldsymbol{P}$ for uma matriz ortogonal, os autovalores de $\boldsymbol{PAP'}$ são os mesmos de $\boldsymbol{A}$.

12. Seja $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, X_3)'$ uma vetor aleatório tal que

$$Cov(\boldsymbol{X}) = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

    Responda os itens:

    a) Calcule a variância de $X_1 - 3X_2 + 2X_3$.

    b) Calcule $Cov(\boldsymbol{Z})$ em que $\boldsymbol{Z} = (Z_1, Z_2)$ com $Z_1 = X_1 + X_2$ e $Z_2 = X_1 + X_2 + X_3$.

13. Os dados contidos no arquivo Braga1998PCR.txt, no site do curso são provenientes de um estudo na área de Cardiologia. O objetivo é comparar as curvas de variação do consumo de oxigênio no ponto de compensação respiratório (PCR) em função da carga utilizada na esteira ergométrica para para pacientes com diferentes etiologias cardíacas. Responda os itens:

    a) Especifique um modelo linear simples que permita comparar as curvas de variação do consumo de oxigênio no ponto de compensação respiratório (PCR) em função da carga utilizada na esteira ergométrica, sem considerar as etiologias cardíacas. Interprete os parâmetros. Admita que não é possível, no PCR, ter-se pacientes submetidos à uma carga nula.

    b) Repita o item a) considerando as diferentes etiologias cardíacas.

    c) Especifique pelo menos duas hipóteses de interesse, para os itens a) e b), interpretando-as em termos do problema.

    d) Faça uma análise descritiva dos dados.

    e) Ajuste do modelo apresentado no item a) apresentado os resultados conforme visto em sala de aula (estimativas pontuais, intervalares, testes individuais de nulidade e gráficos de predição). Faça os cálculos à mão e no R.

14. Repita a Questão 13, agora considerando a forma matricial do modelo. Ajuste o modelo apresentando no item b), apresentado os resultados conforme visto em sala de aula. Faça os cálculos à mão e no R.