ME210 C Probabilidade I
Primeiro semestre de 2024
Lista de exercícios I

1. Resolva os exercícios deixados em sala.

2. Pesquise sobre as definições, propriedades e operações básicas sobre conjuntos (nas referências).

3. Sejam A, B, e C subconjuntos de um conjunto Ω. Indique quais afirmações abaixo são verdadeiras e quais são falsas. Justifique suas respostas. OBS $A \setminus B = A - B = A \cap B^c$.

   a) $(A \cup B) \setminus C = A \cup (B \setminus C)$
   b) $A \cap B \cap C = A \cap B \cap (C \cup B)$
   c) $A \cup B \cup C = A \cup (B \setminus (A \cap B)) \cup (C \setminus (A \cup C))$
   d) $A \cup B = (A \setminus (A \cap B)) \cup B$
   e) $A \cap B \cap C \subset (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$
   f) $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A) \subset A \cup B \cup C$
   g) $(A \cup B) \setminus A = B$
   h) $A \cap B^c \cap C \subset A \cup B$
   i) $A \cup B \cup C = A^c \cap B^c \cap C^c$
   j) $(A \cup B)^c \cap C = (A^c \cap C) \cup (B^c \cap C)$
   k) $(A \cup B)^c \cap C = A^c \cap B^c \cap C$
   l) $(A \cup B)^c \cap C = C \setminus (C \cap (A \cup B))$

4. Sejam A, B, C e D subconjuntos de um conjunto Ω. Indique quais afirmações abaixo são verdadeiras e quais são falsas. OBS: $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$. Justifique suas respostas.

   a) $A \Delta A = \emptyset$
   b) $A \Delta B = B \Delta A$
   c) $A \Delta \emptyset = A$
   d) $A \Delta \Omega = A^c$

e) $A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$

f) $A \cap (B\Delta C) = (A\cap B)\Delta(A\cap C)$:

g) $(A\Delta B)\Delta(B\Delta C) = A\Delta C$

h) $A\Delta B = (A\cup B)\setminus(A\cup B)$

i) $A\cup B = (A\Delta B)\Delta(A\cap B)$

j) $(A\cap B^c)\Delta(A^c\cap B) = A\Delta B$

k) $A\Delta B = C \Leftrightarrow A = B\Delta C$

l) $A\Delta B = C\Delta D \Leftrightarrow A\Delta C = B\Delta D$

m) $A\Delta B = A^c\Delta B^c$.

5. A função indicadora de um subconjunto $A \subset \Omega$ é definida por:

$$\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{se } \omega \in A \\ 0, & \text{se } \omega \notin A. \end{cases}$$

Mostre que:

a) $A = B \Leftrightarrow \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$

b) $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B = \min(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)$

c) $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B} = \max(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)$

d) $\mathbb{1}_{A^c} = \mathbb{1}_A$.

e) $\mathbb{1}_A^2 = \mathbb{1}_A$

f) $\mathbb{1}_{A\Delta B} = |\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B|$

6. Sejam $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ $\sigma-$álgebras de conjuntos. Prove que $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ também é uma $\sigma-$álgebra de conjuntos.

7. Quantas permutações diferentes existem das letras A, B, C, D, E, F

a) Que têm as letras A, B juntas em qualquer ordem?

b) Que têm a letra A em primeiro lugar ou a letra F em último?

c) Em que a letra A vem antes da letra B?

d) Em que a letra E não é a última?

8. Um pai compra 7 presentes diferentes (entre os quais, um videogame e um relógio) para dar a seus três filhos.

    a) De quantas maneiras ele pode dividir os 7 presentes entre os filhos, se decide dar 2 presentes ao filho mais velho, 2 presentes ao filho do meio e 3 presentes ao mais novo?
    b) De quantas maneiras ele pode dividir os 7 presentes, se, além da divisão 2 ao mais velho, 2 ao do meio e 3 ao mais novo, ele resolve dar pelo menos um entre o videogame e o relógio ao filho mais velho?
    c) De quantas maneiras ele pode dividir os 7 presentes, se, além da divisão 2 ao mais velho, 2 ao do meio e 3 ao mais novo, ele decide dar exatamente um entre o videogame e o relógio ao filho mais velho?