ME 705 A - Inferência Bayesianam
Primeiro semestre de 2012
Lista de Exercícios I

OBS: A menos que o contrário seja mencionado, nos exercícios você deve considerar uma amostra aleatória $X_1|\theta, ..., X_n|\theta$ de $X|\theta$.

OBS: A menos que o contrário seja mencionado, variância do estimador Bayesiano deve ser calculada sob a ótica frequentista.

1. Resolva os exercícios deixados em sala.
2. Seja $X|\theta \sim \text{bin}(m, \theta), \theta \in (0, 1)$, m conhecido. Considere $\theta \sim \text{beta}(a, b)$, (a,b) conhecidos. Responda os itens

   a) Considere m=1. Qual seria a estimativa de máxima verossimilhança de θ quando $x_i = 0, \forall i$? E quanto $x_i = 1, \forall i$?
   b) Encontre a distribuição $\theta|\boldsymbol{x}$ calculando diretamente a constante de normalização.
   c) Obtenha $\widehat{\theta}_{EAP}$, $\widehat{\theta}_{Mo}$ e $\widehat{\theta}_{Md}$ e suas respectivas variâncias.
   d) Como fica a posteriori considerando o cenário do item a)? É possível obter estimativas dentro do espaço paramétrico?
   e) Considere que $a = b = 1$. Qual seria a "crença" à priori com relação à θ neste caso?
   f) Compare os estimadores de máxima verossimilhaça, EAP e MAP, através de seus EQM's. Considerando $a = b = 1$, qual dos estimadores você escolheria? Justifique, adequadamente, sua resposta.
   e) Determine a família conjugada natural para o o modelo (binomial).

3. Seja $X|\theta \sim \text{gama}(r, \lambda), \lambda > 0$, em que $\mathcal{E}[X|\lambda] = r\lambda$, r conhecido.

   a) Determine a família conjugada natural para o o modelo em questão.
   b) Ache a distribuição a posteriori de λ com base na priori encontrada no item a).
   c) Obtenha os estimadores EAP e MAP de λ e suas variâncias.
   d) Compare os estimadores de máxima verossimilhaça, EAP e MAP, através de seus EQM's. Considerando que a e b são os parâmetros da priori (hiperparâmetros), qual dos estimadores você escolheria? Justifique, adequadamente, sua resposta.
   e) A priori encontrada no item a) depende de dois parâmetros. Considerando que os dois são iguais a 1, repita a compração feita no item d).
   f) Considere que $p(\lambda) \propto \mathbb{1}_{(0,\infty)}(\lambda)$. Verifique se a posteriori é própria.

4. Seja $X|\theta \sim \text{Poisson}(\theta), \theta > 0$.

   a) Determine a família conjugada natural para o o modelo (binomial).
   b) Ache a distribuição a posteriori de θ com base na priori encontrada no item a).

c) Obtenha os estimadores EAP e MAP de θ e suas variâncias.

d) Compare os estimadores de máxima verossimilhaça, EAP e MAP, através de seus EQM's. Considerando que a e b são os parâmetros da priori (hiperparâmetros), qual dos estimadores você escolheria? Justifique, adequadamente, sua resposta.

e) A priori encontrada no item a) depende de dois parâmetros. Considerando que os dois são iguais a 1, repita a compração feita no item d).

f) Considere que $p(\theta) \propto \mathbb{1}_{(0,\infty)}(\theta)$. Verifique se a posteriori é própria.

5. Aplique os resultados da questão anterior nos dados da Tabela 2.2 pag 69 do livro Bayesian data analysis. Considere, primeiramente, o número de acidentes fatais como variável resposta e, depois, o número de passageiros mortos.

6. Considere $X \sim f_X(x;\theta)$ em que

$$p(x|\theta) = \theta x^{\theta-1}\mathbb{1}_{(0,1)}(x)$$

a) Determine a família conjugada natural para o o modelo.

b) Ache a distribuição a posteriori de θ com base na priori encontrada no item a).

c) Obtenha os estimadores EAP e MAP de θ e suas variâncias.

d) Compare os estimadores de máxima verossimilhaça, EAP e MAP, através de seus EQM's. Considerando que a e b são os parâmetros da priori (hiperparâmetros), qual dos estimadores você escolheria? Justifique, adequadamente, sua resposta.

e) A priori encontrada no item a) depende de dois parâmetros. Considerando que os dois são iguais a 1, repita a compração feita no item d).

f) Considere que $p(\theta) \propto \mathbb{1}_{(0,\infty)}(\theta)$. Verifique se a posteriori é própria.

7. Considere $X \sim U_{[0,\theta]}, \theta > 0$.

a) Determine a família conjugada natural para o o modelo.

b) Ache a distribuição a posteriori de θ com base na priori encontrada no item a).

c) Obtenha os estimadores EAP, MdAP e MAP de θ e suas variâncias.

d) Compare os estimadores de máxima verossimilhaça, EAP, MdAP e MAP, através de seus EQM's. Considerando que a e b são os parâmetros da priori (hiperparâmetros), qual dos estimadores você escolheria? Justifique, adequadamente, sua resposta.

e) A priori encontrada no item a) depende de dois parâmetros. Considerando que os dois são iguais a 1, repita a compração feita no item d).

f) Considere que $p(\theta) \propto \mathbb{1}_{(0,\infty)}(\theta)$. Verifique se a posteriori é própria.

8. Como seria a fórmula geral da posteriori se o espaço amostral fosse finito ou infinito enumerável?

9. Considere a fórmula da atualização da posteriori. Como ela ficaria se $\boldsymbol{X}'|\theta \perp \boldsymbol{X}''\theta$?

10. Ainda em relação à formula da atualização da posteriori, considere:

a) Considere uma amostra aleatórioa de tamanho n de $p(x|\theta) = x_i\theta^{x_i-1}\mathbb{1}_{(1,\infty)}(x), \theta \in (0,1)$ e $p(\theta) = \text{beta}(a,b)$, a,b conhecidos. Encontre: a verossimilhança associada ao modelo e a posteriori de θ. Suponha que uma novo conjunto de observações $X_{n+1}, ..., X_{m+n}$ está disponível. Como ficaria posteriori atualizada?

b) Considere o modelo $Y_i = \theta Y_{i-1} + \xi_i, i = 2, ..., n,$ $Y_1 \sim N(0,1), \xi_i \sim N(0,1), Y_{i-1} \perp \xi_i, \theta \in (-1,1)$. Assuma que $\theta \sim U_{[-1,1]}$. Encontre: a verossimilhança associada ao modelo e a posteriori de θ. Suponha que uma novo conjunto de observações $Y_{n+1}, ..., Y_{m+n}$ está disponível. Como ficaria posteriori atualizada?

11. Os dados disponíveis no site dizem respeito ao tempo de vida de n = 60 lâmpadas, de uma nova versão de um modelo comercial, medidos em horas. Além disso, traz informações sobre as médias dos tempos de vida de 20 outras versões anteriores da lâmpada em questão. Considere que o tempo de vida de cada lâmpada (da nova versão) segue uma distribuição exponencial $\mathcal{E}(X) = \theta$. Desejamos estimar θ.

    a) Proponha uma priori, com base nas informações das 20 estimativas. Justifique, adequadamente, sua escolha.

    b) Como base nessa priori, encontre a posteriori e forneça uma estimativa Bayesiana para θ.