ME 731 - Métodos em Análise Multivariada
Segundo semestre de 2020
Lista de Exercícios I

OBS: Nas questões envolvendo a obtenção do teste da razão de verossimilhanças (TRV) você deverá obter a estatística $\Lambda = \dfrac{L(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_0)}{L(\widehat{\boldsymbol{\theta}})}$, em que $L(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_0), L(\widehat{\boldsymbol{\theta}})$ são, respectivamente, a verossimilhança maximizada sob H_0 e irrestritamente, depois a estatística $\lambda = -2\ln\Lambda$, apresentando a respectiva distribuição assintótica desta última, simplificando ambas as estatísticas o máximo possível. Para a versão assintótica do teste, você deverá apresentar as regiões de aceitação e crítica, bem como o p-valor associado ao teste.

1. Seja $\boldsymbol{X} \sim N_2(\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho)$, cuja é densidade é dada por:

$$
\begin{aligned}
f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) &= \left(\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}\right)^{-1}(2\pi)^{-1} \times \\
&\times \exp\left\{-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\right.\right. \\
&\times \left.\left.\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)\right]\right\} \\
&\times \mathbb{1}_{\mathcal{R}^2}(\boldsymbol{x})
\end{aligned}
$$

   Prove que X_1 e X_2 são independentes se e somente se forem não correlacioandos.

2. Prove, em relação à questão 1), que $X_1|X_2 = x_2 \sim N\left(\mu_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\left(x_2-\mu_2\right), \sigma_1^2(1-\rho^2)\right)$. Sugestão: procure escrever o expoente em termos de somas de quadrados, após simplificar o que for possível.

3. Sejam $X_1, ..., X_n$, variáveis aleatórias independentes tais que $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$. Prove que $\boldsymbol{X} = (X_1, ..., X_n)' \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, em que $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, ...\mu_n)'$ e $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$.

4. Exercício 4.13 página 203 do Livro Johson & Wichern. Applied Multivariate Analysis.

5. Seja $\boldsymbol{X} \sim N_p(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$, obtenha a distribuição de $Y = \boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{X}$. Sugestão: calcule a f.g.m. de Y.

6. Sejam $\boldsymbol{X}_1, ..., \boldsymbol{X}_n$, vetores aleatórios independentes tais que $\boldsymbol{X}_i \sim N_p(\boldsymbol{\mu}_i, \boldsymbol{\Sigma}_i)$. Prove que $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{X}'_1, ..., \boldsymbol{X}'_n)' \sim N_{np}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, em que $\boldsymbol{\mu} = (\boldsymbol{\mu}'_1, ...\boldsymbol{\mu}'_n)'$ e $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\Sigma}_2 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & \boldsymbol{\Sigma}_n \end{bmatrix}$.

7. Seja $\boldsymbol{X}_1, ..., \boldsymbol{X}_n$ uma a.a. de $\boldsymbol{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. Responda os itens:

   a) Obtenha o TRV para testar $H_0 : \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0$ vs $H_1 : \boldsymbol{\mu} \neq \boldsymbol{\mu}_0$, em que $\boldsymbol{\mu}_0$ é um vetor conhecido, com $\boldsymbol{\Sigma}$ conhecido, ao nível de significância de α.

   b) Repita o item b) considerando $\boldsymbol{\Sigma}$ desconhecido.

   c) Encontre os estimadores de máxima verossimilhança de $\boldsymbol{\mu}$ e $\boldsymbol{\Sigma}$ sob a restrição de que $\boldsymbol{R}\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{b}$, em que $\boldsymbol{b}$ é um vetor conhecido $(c \times 1)$ e $\boldsymbol{R}$ é uma matriz conhecida de dimensão $c \times p, c \leq p$, de posto coluna completo. Sugestão: Use multiplicadores de Lagrange para maximizar a logverossimilhança.

   d) Encontre o teste da razão de verossimilhança (t.r.v) e sua respectiva distribuição assintótica para testar $H_0 : \boldsymbol{R}\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{b}_0$ vs $H_1 : \boldsymbol{R}\boldsymbol{\mu} \neq \boldsymbol{b}_0$, ao nível de significância de α.

8. Seja $\boldsymbol{X}_{i1}, ..., \boldsymbol{X}_{in_i}$ uma a.a. de $\boldsymbol{X}_i \sim N_p(\boldsymbol{\mu}_i, \boldsymbol{\Sigma}_i)$ (duas populações). Responda os itens:

   a) Obtenha o TRV para testar $H_0 : \boldsymbol{\mu}_1 = \boldsymbol{\mu}_2$ vs $H_1 : \boldsymbol{\mu}_1 \neq \boldsymbol{\mu}_2$, com $\boldsymbol{\Sigma}_i, i = 1, 2$ conhecidos, ao nível de significância de α.

   b) Repita o item b) considerando $\boldsymbol{\Sigma}_1 = \boldsymbol{\Sigma}_2 = \boldsymbol{\Sigma}$, porém desconhecido.