

OBS: Nas questões envolvendo a obtenção do teste da razão de verossimilhanças (TRV) você deverá obter a estatística  $\Lambda = \frac{L(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0)}{L(\hat{\boldsymbol{\theta}})}$ , em que  $L(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0), L(\hat{\boldsymbol{\theta}})$  são, respectivamente, a verossimilhança maximizada sob  $H_0$  e irrestritamente, depois a estatística  $\lambda = -2 \ln \Lambda$ , apresentando a respectiva distribuição assintótica desta última, simplificando ambas as estatísticas o máximo possível. Para a versão assintótica do teste, você deverá apresentar as regiões de aceitação e crítica, bem como o p-valor associado ao teste.

1. Seja  $\mathbf{X} \sim N_2(\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho)$ , cuja densidade é dada por:

$$\begin{aligned}
 f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) &= \left(\sigma_1 \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2}\right)^{-1} (2\pi)^{-1} \times \\
 &\times \exp\left\{-\frac{1}{2(1 - \rho^2)} \left[ \left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right)^2 - 2\rho \left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right) \right. \right. \\
 &\times \left. \left. \left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right) \right] \right\} \\
 &\times \mathbb{1}_{\mathcal{R}^2}(\mathbf{x})
 \end{aligned}$$

Prove que  $X_1$  e  $X_2$  são independentes se e somente se forem não correlacionados.

2. Prove, em relação à questão 1), que  $X_1|X_2 = x_2 \sim N\left(\mu_1 + \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (x_2 - \mu_2), \sigma_1^2(1 - \rho^2)\right)$ . Sugestão: procure escrever o expoente em termos de somas de quadrados, após simplificar o que for possível.

3. Sejam  $X_1, \dots, X_n$ , variáveis aleatórias independentes tais que  $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ . Prove que

$$\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)' \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}), \text{ em que } \boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)' \text{ e } \boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}.$$

4. Exercício 4.13 página 203 do Livro Johson & Wichern. Applied Multivariate Analysis.

5. Seja  $\mathbf{X} \sim N_p(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma})$ , obtenha a distribuição de  $Y = \mathbf{X}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{X}$ . Sugestão: calcule a f.g.m. de  $Y$ .
6. Sejam  $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$ , variáveis aleatórias independentes tais que  $\mathbf{X}_i \sim N_p(\boldsymbol{\mu}_i, \mathbf{\Sigma}_i)$ . Prove que  $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n)' \sim N_{np}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{\Sigma})$ , em que  $\boldsymbol{\mu} = (\boldsymbol{\mu}_1, \dots, \boldsymbol{\mu}_n)'$  e  $\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{\Sigma}_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{\Sigma}_n \end{bmatrix}$ .
7. Seja  $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$  uma a.a. de  $\mathbf{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{\Sigma})$ . Responda os itens:
- Obtenha o TRV para testar  $H_0 : \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0$  vs  $H_1 : \boldsymbol{\mu} \neq \boldsymbol{\mu}_0$ , em que  $\boldsymbol{\mu}_0$  é um vetor conhecido, com  $\mathbf{\Sigma}$  conhecido, ao nível de significância de  $\alpha$ .
  - Repita o item b) considerando  $\mathbf{\Sigma}$  desconhecido.
  - Encontre o estimadores de máxima verossimilhança de  $\boldsymbol{\mu}$  e  $\mathbf{\Sigma}$  sob a restrição de que  $\mathbf{R}\boldsymbol{\mu} = \mathbf{b}$ , em que  $\mathbf{b}$  é um vetor conhecido ( $c \times 1$ ) e  $\mathbf{R}$  é uma matriz conhecida de dimensão  $c \times p$ ,  $c \leq p$ , de posto coluna completo. Sugestão: Use multiplicadores de Lagrange para maximizar a logverossimilhança.
  - Encontre o teste da razão de verossimilhança (t.r.v) e sua respectiva distribuição assintótica para testar  $H_0 : \mathbf{R}\boldsymbol{\mu} = \mathbf{b}_0$  vs  $H_1 : \mathbf{R}\boldsymbol{\mu} \neq \mathbf{b}_0$ , ao nível de significância de  $\alpha$ .
8. Seja  $\mathbf{X}_{i1}, \dots, \mathbf{X}_{in_i}$  uma a.a. de  $\mathbf{X}_i \sim N_p(\boldsymbol{\mu}_i, \mathbf{\Sigma}_i)$  (duas populações). Responda os itens:
- Obtenha o TRV para testar  $H_0 : \boldsymbol{\mu}_1 = \boldsymbol{\mu}_2$  vs  $H_1 : \boldsymbol{\mu}_1 \neq \boldsymbol{\mu}_2$ , com  $\mathbf{\Sigma}_i, i = 1, 2$  conhecidos, ao nível de significância de  $\alpha$ .
  - Repita o item b) considerando  $\mathbf{\Sigma}_1 = \mathbf{\Sigma}_2 = \mathbf{\Sigma}$ , porém desconhecido.