ME 714 A - Análise de dados discretos
Primeiro semestre de 2014
Lista de Exercícios I

OBS1: A menos que o contrário seja mencionado, nos exercícios você deve considerar uma amostra aleatória (não necessariamente identidicamente distribuída) $X_1, ..., X$ de X (a variável aleatória, ou vetor aleatório ou o modelo de regressão, especificado na questão).

OBS2: Obter um teste (exato ou assintótico) significa, a menos que o contrário seja mencionado, propor uma estatística do teste que seja apropriada para testar as hipóteses de interesse, sua distribuição sob H_0, as regiões crítica e de aceitação, bem como o valor p (p-valor).

1. Resolva os exercícios deixados em sala.
2. Pesquise sobre a distribuição assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança.
3. Pesquise sobre a distribuição assintótica, sob H_0, de $\Lambda = -2ln\lambda$, em que λ é a estatística do teste da razão de verossimilhanças para testar $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta \neq \theta_0$, em que θ é um parâmetro (ou vetor de parâmetros) e θ_0 um valor (ou um vetor de valores) conhecido.
4. Revise o conteúdo visto na disciplina de Análise de regressão.
5. Seja $X|\theta \sim \text{bin}(m, \theta), \theta \in (0, 1)$, considere m = 1.
   a) Obtenha o estimador de máxima verossimilhança (EMV) de θ, provando que é ponto de máximo, bem como como sua esperança e sua variância exatas.
   b) Obtenha a distribuição assintótica do EMV.
   c) Com base na distribuição assintótica do EMV, obtenha um intervalo de confiança assintótico (ICA), com confiança γ, para θ.
   d) Com base na distribuição assintótica do EMV, proponha um teste assintótico para testar $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta \neq \theta_0$, em que θ_0 é conhecido.
   e) Obtenha a versão assintótica do teste da razão de verossimilhanças (TRV) para testar as hipóteses apresentadas no item d).
6. Resolva os itens da questão 5, considerando m geral.
7. Resolva os itens da questão 5, considerando que $X \sim \text{Poisson}(\theta), \theta \in (0, \infty)$.
8. Resolva os itens da questão 5, considerando que $X \sim \text{geométrica}(\theta), \theta \in (0, 1)$, ou seja $p(x; \theta) = (1 - \theta)^x \theta \mathbb{1}_{\{0,1,2,...\}}(x)$. Nesse caso X representa o número de fracassos obtidos nas repetições, até se obter o primeiro sucesso.

9. Resolva os itens da questão 5, considerando que $X \sim$ binomial negativa(r, θ), (r conhecido) ou seja

$$p(x;\theta) = \begin{pmatrix} x+r-1 \\ x \end{pmatrix} \theta^r \, (1-\theta)^x \, \mathbb{1}_{\{0,1,2,\ldots\}}(x).$$

Neste caso X representa o número de fracassos obtidos nas repetições, até se obter r sucessos.

10. Seja X uma variável aleatória discreta com suporte no conjunto A. A função geradora de probabilidades de X, $P_X(t)$, é definida por:

$$P_X(t) = \sum_{x \in A} t^x p(x;\theta).$$

Responda os itens:

a) Prove que $\frac{\partial^k P_X(t)}{\partial t^k}|_{t=0} = \mathcal{E}\left(\prod_{i=1}^{k}(X-i+1)\right)$.

b) Obtenha $P_X(.)$ para as distribuições dadas nas questões 5), 6), 7), 8) e 9), desta lista. Sugestão. Para as distribuições binomial e binomial - negativa, use suas definições em termos das distribuições Bernoulli e geométrica, respectivamente.

c) Utilize os itens a) e b), para obter $\mathcal{E}(X)$ e $\mathcal{V}(X)$ das ditribuições mencionadas no item b).

11. Considere $X_i, i = 1,2,...,n_1$ e $Y_j, j = 1,2,...,n_2$, tais que $X_i \perp Y_j, \forall i,j$, $X_i \stackrel{i.i.d.}{\sim}$ Bernoulli(θ_1) e $Y_j \stackrel{i.i.d.}{\sim}$ Bernoulli(θ_2), $\theta_i \in (0,1), i = 1,2$. Ou seja, X_i e Y_j são mutuamente independentes. Considere o interesse em testar $H_0 : \theta_1 = \theta_2$ vs $H_1 : \theta_1 \neq \theta_2$. Responda os itens:

a) Obtenha os EMV's de θ_1 e θ_2 sob H_1 e sob H_0, bem como suas esperanças e variâncias exatas.

b) Obtenha as distribuições assintóticas dos EMV's obtidos no item a).

c) Com base na distribuição assintótica do EMV, obtenha um intervalo de confiança assintótico (ICA), com confiança γ, para θ.

d) Com base na distribuição assintótica do EMV, proponha um teste assintótico para testar as hipóteses de interesse.

e) Obtenha a versão assintótica do teste da razão de verossimilhanças (TRV) para testar as hipóteses de interesse.

12. Considere o modelo de regresão linear simples normal, ou seja $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \xi_i$, $x_i, i = 1, 2, ..., n$ conhecidos, e $\xi_i \overset{i.i.d.}{\sim} N(0, \sigma^2)$. Encontre os estimadores de mínimos quadrados de $\boldsymbol{\theta} = (\beta_1, \beta_1)'$, suas respectivas distributições marginais (exatas) e sua distribuição conjunta (exata).