

ME 731 - Métodos em Análise Multivariada  
Segundo semestre de 2020  
Lista de Exercícios 0

OBS: Nas questões envolvendo a obtenção do teste da razão de verossimilhanças (TRV) você deverá obter a estatística  $\Lambda = \frac{L(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0)}{L(\hat{\boldsymbol{\theta}})}$ , em que  $L(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0), L(\hat{\boldsymbol{\theta}})$  são, respectivamente, a verossimilhança maximizada sob  $H_0$  e irrestritamente, depois a estatística  $\lambda = -2 \ln \Lambda$ , apresentando a respectiva distribuição assintótica desta última, simplificando ambas as estatísticas o máximo possível. Para a versão assintótica do teste, você deverá apresentar as regiões de aceitação e crítica, bem como o p-valor associado ao teste.

1. Seja  $X_1, X_2, \dots, X_n$  uma amostra aleatória de  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $\mu \in \mathcal{R}$  e  $\sigma^2 \in \mathcal{R}^+$ , ambos desconhecidos. Responda os itens:
  - a) Escreva a densidade conjunta da amostra em termos da família exponencial, ou seja,  $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = a(\boldsymbol{\theta})b(\mathbf{x}) \exp \left[ \sum_{i=1}^2 c_i(\boldsymbol{\theta})d_i(\mathbf{x}) \right]$ , em que  $\boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma^2)$  e  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)'$ .
  - b) Encontre uma estatística suficiente para  $\boldsymbol{\theta}$ .
  - c) Encontre os estimadores de máxima verossimilhança de  $(\mu, \sigma^2)$ .
  - d) Proponha um procedimento estatístico para testar as hipóteses  $H_0 : \mu = \mu_0$ , vs,  $H_1 : \mu \neq \mu_0$  (em que  $\mu_0$  é uma constante conhecida), ou seja, proponha uma estatística de teste e obtenha: sua distribuição sob  $H_0$ , sua distribuição sob  $H_1$ , as regiões crítica e de aceitação associadas e a função poder do teste.
  - e) Calcule o teste da razão de verossimilhanças para testar as hipóteses definidas no item d) e encontre sua respectiva distribuição assintótica.
2. Considere o modelo de regressão normal linear em forma matricial, ou seja:

$$\mathbf{Y}_{(n \times 1)} = \mathbf{X}_{(n \times k)}\boldsymbol{\beta}_{(k \times 1)} + \boldsymbol{\xi}_{(n \times 1)},$$

em que

$$\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)' \text{ é o vetor com as variáveis resposta, } \mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1k} \\ X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{n1} & X_{n2} & \dots & X_{nk} \end{bmatrix}$$

é a matriz com as variáveis explicativas,  $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_k)'$  é o vetor de parâmetros e  $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)' \sim N(\mathbf{0}_n, \sigma^2 \mathbf{I}_n)$ , em que  $\mathbf{I}_n$  denota uma matriz identidade de ordem  $n$ .

Responda os itens:

- a) Encontre o estimador de mínimos quadrados de  $\beta$ , e denote-o por  $\hat{\beta}$ .
- b) Encontre a distribuição exata de  $\hat{\beta}$ .
- c) Proponha uma estatística para testar a hipótese  $\beta_k = \beta_{0k}$ , em que  $\beta_{0k}$  é uma constante conhecida, e encontre sua distribuição sob  $H_0$ .