

# INLA - “Integrated Nested Laplace Approximation” para inferência bayesiana (parte 1)

Prof. Caio Azevedo

# Motivação

- Os métodos vistos [aqui](#) e [aqui](#), em geral, apesar de rápidos e de baixa demanda computacional, podem não ser viáveis à medida que o número de parâmetros e/ou a complexidade do modelo aumenta.
- Em geral, o número de parâmetros tende a ser elevado, principalmente quando do uso de modelos de regressão.
- Os métodos MCMC, que veremos adiante, apesar de extremamente flexíveis, bem difundidos, e com ampla oferta computacional, podem demandar bastante tempo de processamento e esforço computacional.

# Motivação e Introdução

- A fim de prover um método menos custoso computacionalmente e tão flexível quanto possível, [Rue, Martino, and Chopin \(2009\)](#) retomaram a utilização da Aproximação de Laplace, em conjunto com rotinas de otimização e estimação semi-paramétrica de densidades.
- Os autores acima, inicialmente, desenvolveram o método pensando nos [modelos Gaussianos latentes](#) (MGL mas, com o passar do tempo, a aplicabilidade tem aumentadas pois, modelos outros que se encaixem nesta classe, podem ser ajustados via INLA).

# Introdução

- INLA: “Integrated Nested Laplace Approximation”: “Aproximações de Laplace Encaixadas e Integradas.”
- Vamos considerar uma estrutura mais simples do que os MGL e, embora tenhamos interesse em modelos de regressão, não explicitaremos o uso de covariáveis, neste momento.
- Vamos assumir  $Y_i|\theta \in MGL(\theta)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $(Y_i \perp Y_j)|\theta$   
 $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)' \in \mathcal{R}^k$ ,  $\forall i, j$ , são os parâmetros de interesse. Ou seja, não estamos considerando os efeitos aleatórios típicos dos MGL.
- O objetivo principal do INLA, neste caso, é obter aproximação para as posteriores marginais, ou seja, para:

# Explicação do INLA

- O objetivo principal do INLA, neste caso, é obter aproximação para as posteriores marginais, ou seja, para:

$$\begin{aligned} p(\theta_j | \mathbf{y}) &= \int p(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}) d\boldsymbol{\theta}_{(-j)} = \frac{\int p(\mathbf{y} | \boldsymbol{\theta}) p(\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta}_{(-j)}}{\int p(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}) p(\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta}} \\ &= \frac{\int p(\mathbf{y} | \boldsymbol{\theta}) p(\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta}_{(-j)}}{p(\mathbf{y})} \end{aligned}$$

$j = 1, 2, \dots, k$ , em que  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)'$  e  $\boldsymbol{\theta}_{(-j)}$  corresponde ao vetor  $\boldsymbol{\theta}$ , sem a componente  $j$ .

# Explicação do INLA

- Todo o procedimento de estimação no INLA é feito de várias etapas.
- Primeiramente, a moda a posteriori ( $\theta^*$ ) de  $p(\theta|\mathbf{y})$  é obtida maximizando-se  $\ln p(\theta|\mathbf{y})$  com relação à  $\theta$  usando (algum) método de Quasi-Newton ([aqui](#)).
- Posteriormente, algum método de diferenças finitas são usados para obter o valor negativo da matriz Hessiana ( $\mathbf{H}$ ).
- Em seguida, a decomposição do valor singular de  $\mathbf{H}^{-1}$  é utilizada, ou seja,  $\mathbf{H}^{-1} = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}'$ .
- Então, é feito um reescalonamento de  $\theta$ , através de
$$\theta(\mathbf{z}) = \theta^* + \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}^{1/2}\mathbf{z}$$

# Explicação do INLA

- Este reescalonamento é útil para explorar o espaço paramétrico de  $\theta$  de forma mais eficiente, pois corrige a “escala” e a “rotação”.
- Finalmente,  $\ln p(\theta|\mathbf{y})$  é analisada usando a parametrização ( $\mathbf{z}$ ) de duas formas diferentes.
- A primeira consiste em usar uma grade regular de valores com incrementos  $h$  centrada na moda de  $\mathbf{z}(= \mathbf{0})$  e os pontos nessa grade são considerados se :

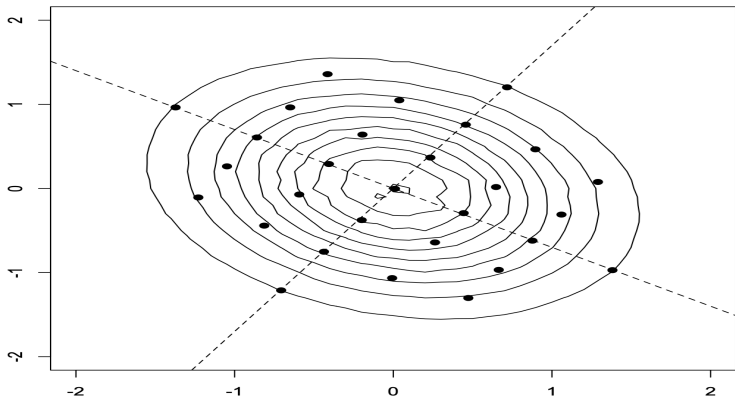
$$|\ln p(\theta(\mathbf{0})|\mathbf{y}) - \ln p(\theta(\mathbf{z})|\mathbf{y})| < \delta, \delta > 0$$

# Explicação do INLA

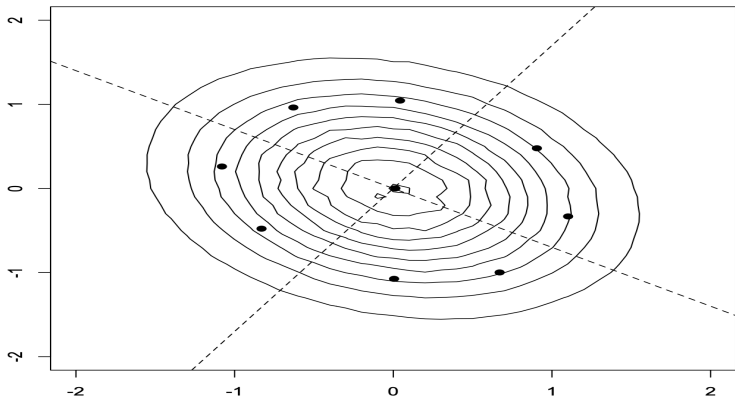
- Uma segunda forma consiste em usar o “central composite design” (CCD, [Box and Draper 1987](#)), “planejamento composto central”, centrado em  $\theta(\mathbf{0})$  para que alguns poucos pontos sejam estrategicamente obtidos, em vez de usar pontos em uma grade regular.
- Isso pode ser mais eficiente que a estratégia de grade à medida que a dimensão do espaço de hiperparâmetros aumenta.



## Primeira forma (grade de valores) ([fonte](#))



## Segunda forma (CCD) (fonte)



# Referências

- Bayesian Regression Modeling with INLA ([livro](#))
- Bayesian Inference with Inla ([livro](#))
- Advanced Spatial Modeling with Stochastic Partial Differential Equations Using R and INLA ([livro](#))
- Bayesian inference with INLA ([livro](#))
- Approximate Bayesian Inference for Latent Gaussian Models by Using Integrated Nested Laplace Approximations ([artigo original](#))
- Bayesian Computing with INLA: A Review ([artigo de revisão](#))

# Referências

- Página do INLA project ([site com materiais diversos](#)).
- Apresentação/tutorial ([link](#)).
- Apresentação/tutorial ([link](#)).
- Apresentação/tutorial ([link](#)).
- Apresentação/tutorial ([link](#)).

# Comentários sobre o INLA

- Bem mais flexível (capaz de ajustar várias classes de modelos) do que os outros métodos vistos, até o momento.
- Relativamente rápido, para os resultados obteníveis.
- Para modelos com muitos parâmetros e/ou fora do contexto MGL pode não ser viável.

# INLA no R

- O INLA está implementado no R no pacote (principal) INLA (há “outros”, na verdade há um conjunto de códigos em R, chamado de R-INLA ([aqui](#))).

- Comandos básicos:

```
install.packages("INLA")
```

```
inla.upgrade()
```

- função básica: `inla(...)`.
- Veremos os comandos básicos, em geral, usando o default das respectivas funções.

# Voltando aos dados sobre número de acidentes

- Voltaremos ao exemplo do número de acidentes, considerando apenas o ano de 1961 ([aqui](#)).
- O modelo aqui adotado difere um pouco daquele usado anteriormente, com efeito, assumiremos que  $Y_i|\theta \stackrel{iid}{\sim} \text{Poisson}(e^\theta)$ ,  $\theta \in \mathcal{R}$ . Ou seja, a inferência é feita para  $\theta$ .
- Isso se deve ao fato de que o R-INLA tem implementados modelos de regressão (e não somente os modelos probabilísticos), além de utilizar parametrizações mais úteis para o processo de aproximação das posteriores.

# Códigos INLA e análises

```
#####  
# Somente o ano de 1961  
# obtendo a posterior de theta=log(lambda)  
n_acid <- list(vx=vx,vy=vy)  
res_1961_P<-res_1961 <- inla(vx~1,family="poisson",  
data=n_acid,control.compute = list(config = TRUE,cpo=TRUE,  
dic=TRUE,waic=TRUE,mlik=TRUE))  
# resumo dos resultados  
summary(res_1961)  
# objetos  
names(res_1961);names(summary(res_1961))
```



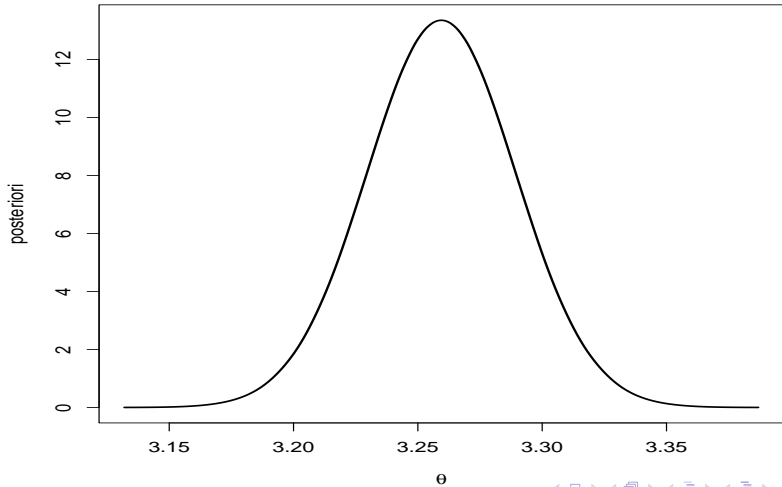
# Códigos INLA e análises

```
# posteriori de theta
ptheta = res_1961$marginals.fixed[[1]]
par(mfrow=c(1,1))
plot(inla.smarginal(ptheta),type="l",lwd=2,
xlab=expression(theta),ylab="posteriori",cex=1.1,
cex.axis=1.1,cex.lab=1.1)

# resumo
inla.zmarginal(ptheta)
res_theta<-inla.zmarginal(ptheta)

# HPD
res_hpd<-inla.hpdmarginal(0.95,pttheta);res_hpd
```

# Posteriori marginal de $\theta$



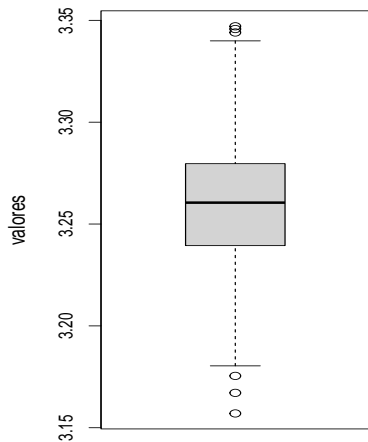
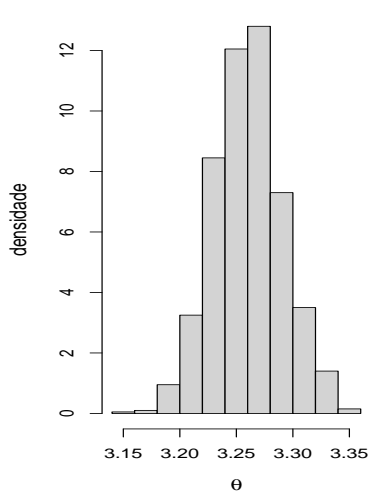
# Estimativas pontuais de $\theta$

Parâmetro	EAP	MeAP	DPAP	IC(95%)	HPD(95%)
$\theta$	3,26	3,26	0,03	[3,20;3,32]	[3,20;3,32]

## Códigos INLA e análises

```
# Simulando valores da posteriori de theta
n_amos_post <- 1000
res_1961_samp <- inla.posterior.sample(n_amos_post,res_1961)
theta_samp <- as.vector(inla.posterior.sample.eval(function(...)
  {Intercept},res_1961_samp))
par(mfrow=c(1,2))
hist(theta_samp,xlab=expression(theta),ylab="densidade",
cex=1.2,cex.main=1.2,cex.lab=1.2,main="")
boxplot(theta_samp,ylab="valores",xlab=expression(theta),
cex=1.2,cex.main=1.2,cex.lab=1.2)
```

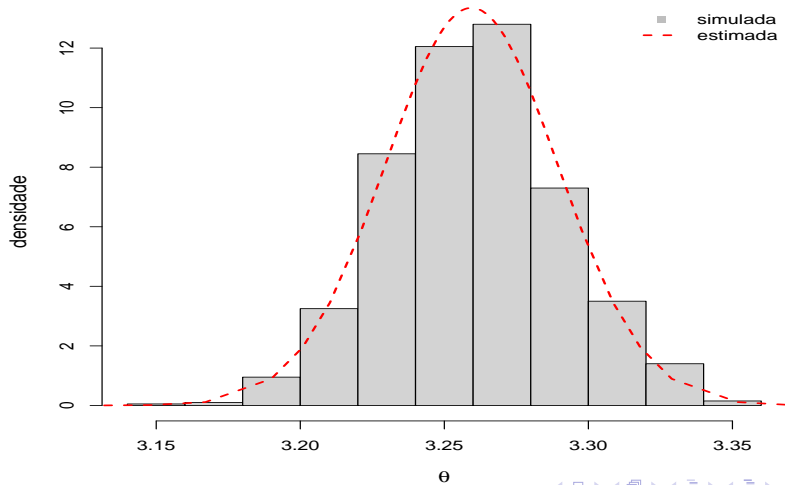
# Posteriori marginal (simulada) de $\theta$



## Códigos INLA e análises

```
# Densidade estimada e simulada
par(mfrow=c(1,1))
hist(theta_samp,xlab=expression(theta),ylab="densidade",
cex=1.2,cex.main=1.2,cex.lab=1.2,main="",probability=TRUE,
ylim=c(0,13))
lines(ptheta[,1],ptheta[,2],lwd=2,lty=2,col="red")
legend("topright",legend=c("estimada","simulada"),
col=c("gray","red"),pch=c(15,-2),lwd=c(-1,2),lty=c(-1,2),
bty="n")
```

# Posteriori marginal (estimada e simulada) de $\theta$



## Códigos INLA e análises

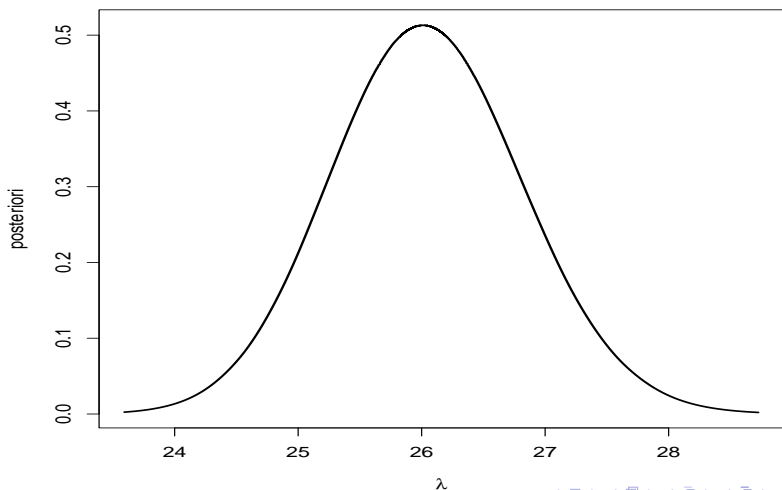
```
# obtendo a posteriori de lambda
plambda<- inla.tmarginal(function(x) exp(x), ptheta)
par(mfrow=c(1,1))
plot(inla.smarginal(plambda),type="l",lwd=2,
xlab=expression(lambda),ylab="posteriori",cex=1.1,
cex.axis=1.1,cex.lab=1.1)

# resumo
inla.zmarginal(plambda);res_lambda<-inla.zmarginal(plambda)

# HPD
res_hpd<-inla.hpdmarginal(0.95,plambda)
```



## Posteriori marginal de $\lambda$



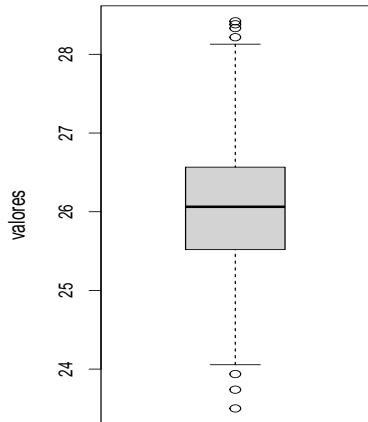
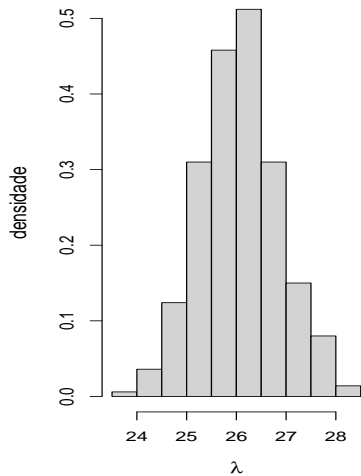
# Estimativas pontuais de $\lambda$

Parâmetro	EAP	MeAP	DPAP	IC(95%)	HPD(95%)
$\lambda$	26,05	26,03	0,77	[24,56;27,60]	[24,54;27,57]

## Códigos INLA e análises

```
# Simulando valores da posteriori de lambda
lambda_samp <- as.vector(inla.posterior.sample.eval(
function(...){exp(Intercept)},res_1961_samp))
par(mfrow=c(1,2))
hist(lambda_samp,xlab=expression(lambda),ylab="densidade",
cex=1.2,cex.main=1.2,cex.lab=1.2,main="")
boxplot(lambda_samp,ylab="valores",xlab=expression(lambda),
cex=1.2,cex.main=1.2,cex.lab=1.2)
```

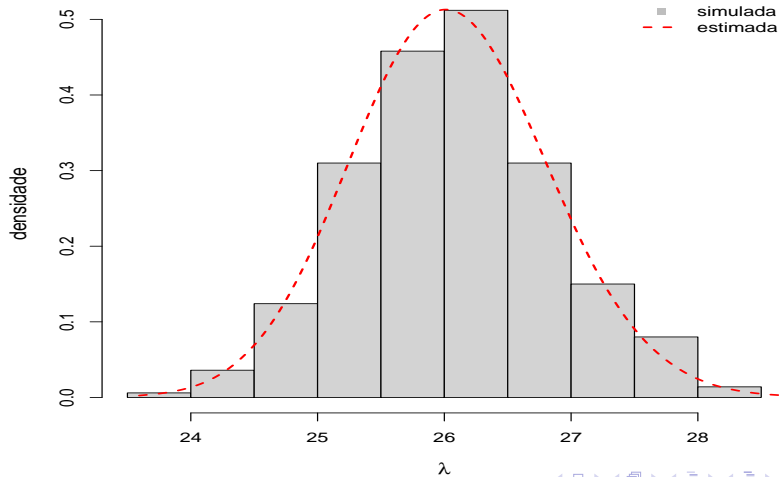
# Posteriori marginal (simulada) de $\lambda$



# Códigos INLA e análises

```
# Densidade estimada e simulada
par(mfrow=c(1,1))
hist(lambda_samp,xlab=expression(lambda),ylab="densidade",
cex=1.2,cex.main=1.2,cex.lab=1.2,main="",probability=TRUE)
lines(plambda[,1],plambda[,2],lwd=2,lty=2,col="red")
legend("topright",legend=c("estimada","simulada"),
col=c("gray","red"),pch=c(15,-2),lwd=c(-1,2),lty=c(-1,2),
bty="n")
```

# Posteriori marginal (estimada e simulada) de $\lambda$



# Códigos INLA e análises

```
# Critérios de informação
calc.estat.mod.comp.bay.INLA(res_1961)

# CPO e PIT
cpo.pit.INLA(res_1961)

# Resíduos
residuals.INLA.1(res_1961,fit=FALSE)

#
residuals.INLA.2(res_1961,envel=TRUE)
```

# Sobre critérios de informação, comparação de modelos e resíduos

- Probabilidade de ocorrência de eventos ([aqui](#)):
  - $CPO_i$  (Conditional predictive ordinate - Ordenada preditiva condicional): 1) Quanto maior, melhor; 2) Calculada para cada observação.
  - $PIT_i$  (Predictive integral transform - Transformação integral preditiva): 1) Espera-se um comportamento próximo de uma  $U(0, 1)$ ; 2) Calculada para observação.



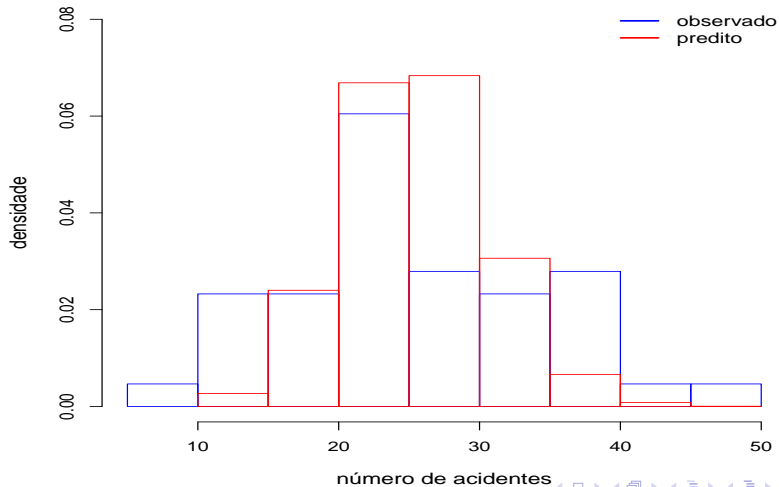
# Sobre critérios de informação, comparação de modelos e resíduos

- Critérios de informação do INLA ([aqui](#)). Quanto menor, melhor o modelo (a “lógica” subjacente à essas quantidades é parecida com aquelas comentadas para [estas](#)).
  - Marginal likelihood (verossimilhança marginal) (MLIK).
  - Conditional predictive ordinate (CPO):  $-\sum_{i=1}^n \ln CPO_i$
  - Deviance information criterion (DIC).
  - Widely applicable Bayesian information criterion (WAIC).

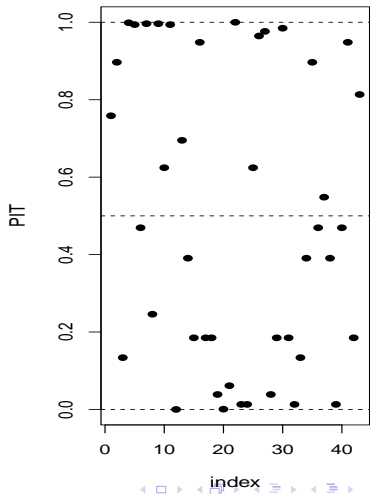
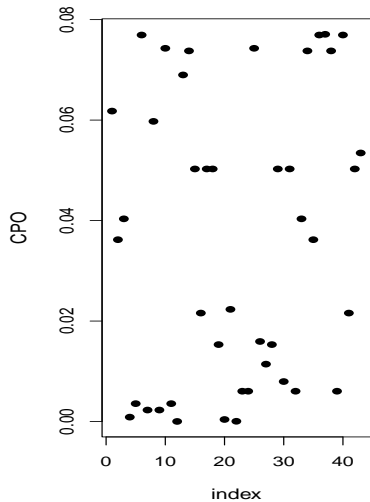
# Sobre critérios de informação, comparação de modelos e resíduos

- Resíduos no INLA:
  - Disponível apenas o resíduo componente do desvio (deviance residual) ([aqui](#) e [aqui](#)).
  - Mesmo sob o bom ajuste, a distribuição de referência é assintoticamente  $N(0,1)$ , somente em condições específicas.
  - É melhor gerar os envelopes através, para o gráfico de quantil-quantil, simulando do modelo (ou de [forma bayesiana](#)). Contudo, os simularemos a partir da distribuição  $N(0,1)$  ([aqui](#)).
  - Assim, faz-se mister analisar tais gráficos de quantil quantil com cautela.

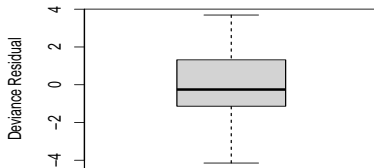
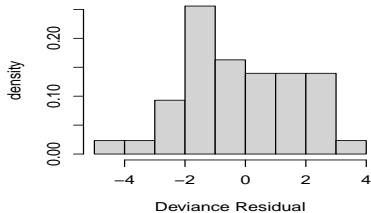
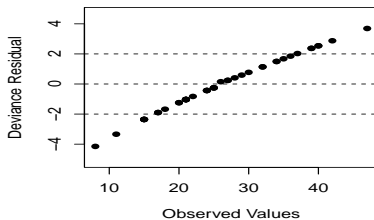
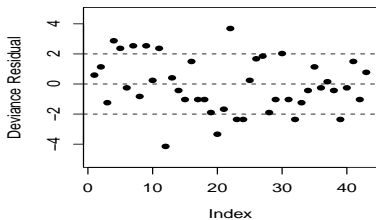
# Dados observados e distribuição preditiva



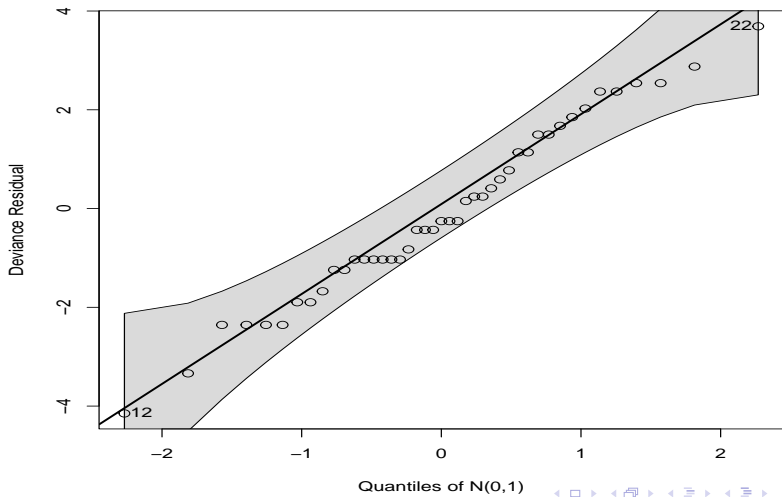
# CPO e PIT



# Diagnóstico dos resíduos



# QQplot dos resíduos



# Comentários sobre o ajuste do modelo

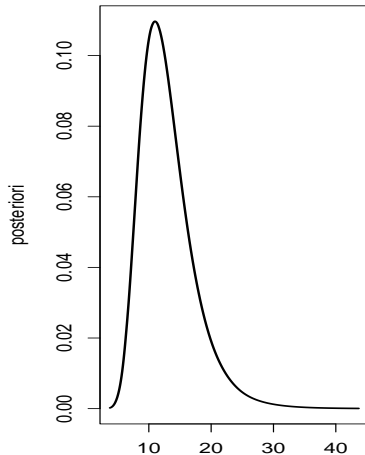
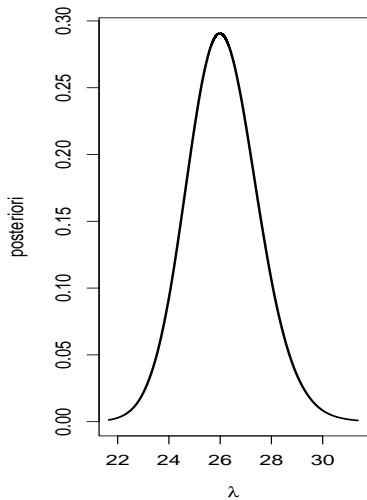
- O CPO e PIT, aparentemente, não indicam maiores problemas no ajuste.
- Contudo, os resíduos apresentam certa assimetria e muitos outliers, embora estejam dentro das bandas de confiança do envelope.
- A predição dos dados observados foi muito ruim (as caudas não foram bem previstas) o que pode indicar a presença de superdispersão nos dados.
- Vamos ajustar um modelo binomial-negativo.

# Voltando aos dados sobre número de acidentes

- Vamos assumir que  $Y_i|\boldsymbol{\theta} \stackrel{iid}{\sim} BN(\lambda, \phi)$  (BN: binomial negativa), em que  $(\boldsymbol{\theta} = (\lambda, \phi)')$   $\mathcal{E}(Y_i|\boldsymbol{\theta}) = \lambda$  e  $\mathcal{V}(Y_i|\boldsymbol{\theta}) = \lambda + \frac{\lambda^2}{\phi}$ .
- Note que  $\mathcal{V}(Y_i|\boldsymbol{\theta}) \geq \mathcal{E}(Y_i|\boldsymbol{\theta})$ .
- Além disso,  $Y|\boldsymbol{\theta} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{D} \text{Poisson}(\lambda)$ .
- Prioris default do INLA. Note que o INLA ajusta o seguinte modelo:  
 $Y_i|\boldsymbol{\theta} \stackrel{iid}{\sim} BN(\lambda = e^\theta, \phi)$ , em que  $\theta$  e  $\phi$  são estimados.



# Posterioris marginais de $\lambda$ e $\phi$

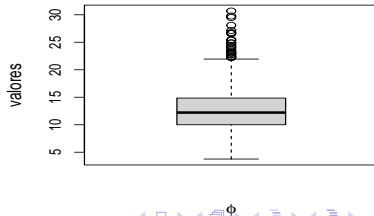
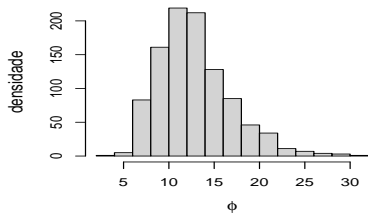
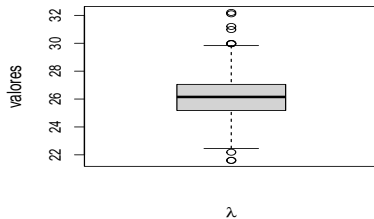
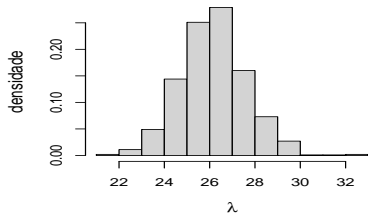


## Estimativas pontuais de $\lambda$ e $\phi$

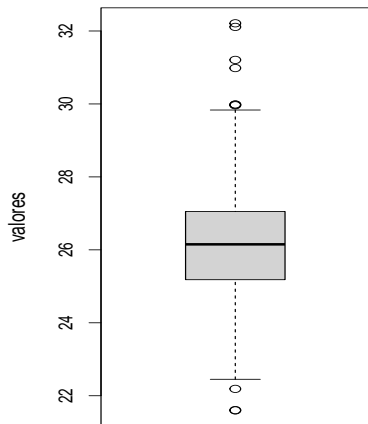
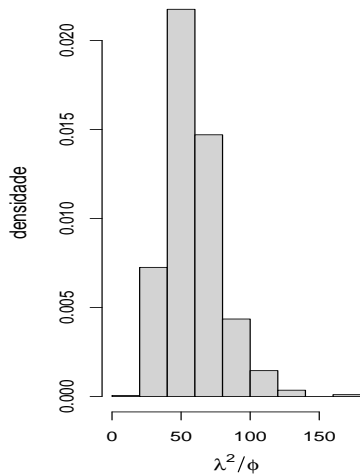
Parâmetro	EAP	MeAP	DPAP	IC(95%)	HPD(95%)
$\lambda$	26,10	26,06	1,40	[23,45;28,96]	[23,38; 28,88]
$\phi$	13,01	12,25	4,39	[6,70;23,67]	[5,81; 21,73]

Os resultados acima indicam presença de superdispersão nos dados. Note que  $MeAP\left(\frac{\lambda^2}{\phi}\right) = 56,47$ , e  $HPD(95\%) = [24,57; 94,75]$  (calculada através da distribuição simulada de  $\frac{\lambda^2}{\phi} | \mathbf{y}$ ).

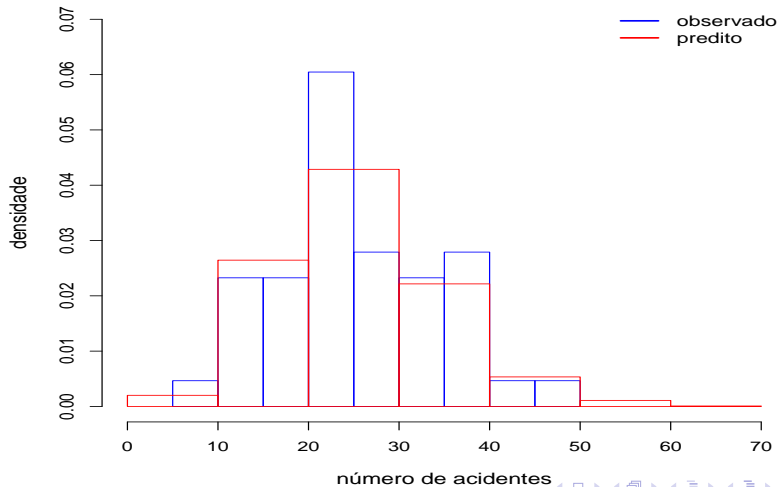
# Posterioris marginais simuladas de $\lambda$ e $\phi$



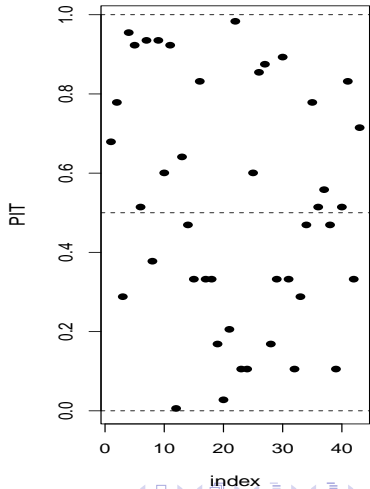
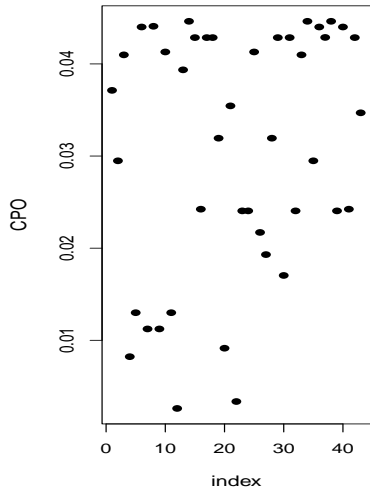
# Posteriori marginal simulada de $\lambda^2/\phi$



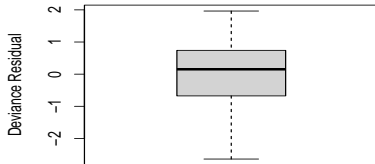
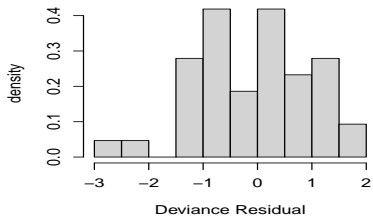
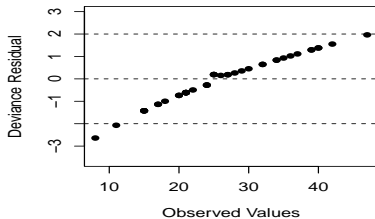
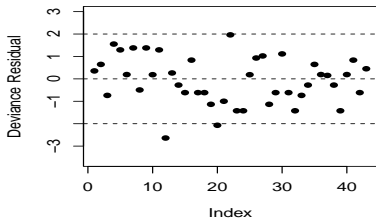
# Dados observados e distribuição preditiva



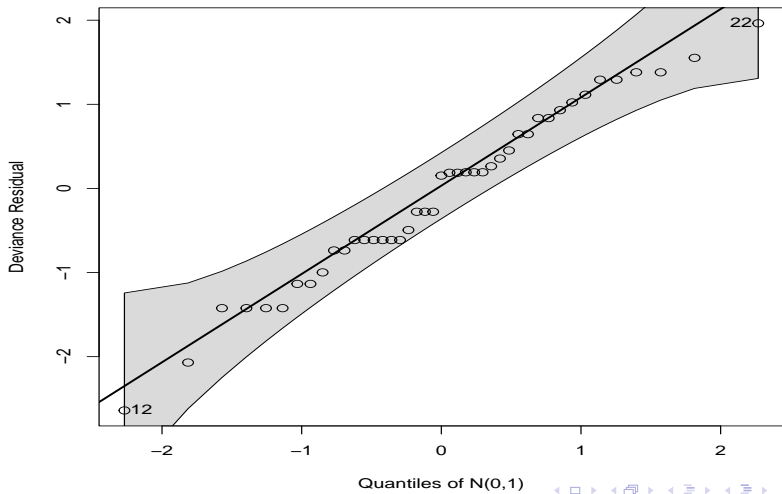
# CPO e PIT



# Diagnóstico dos resíduos

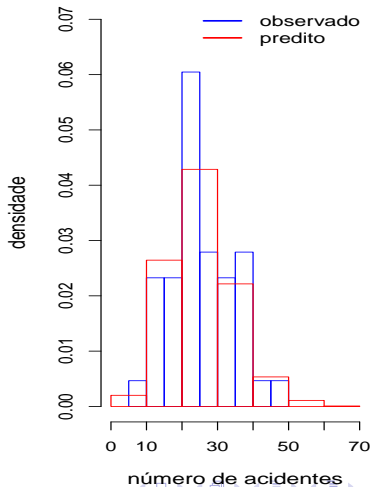
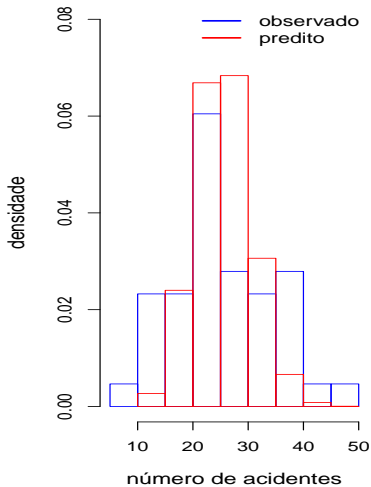


# QQplot dos resíduos

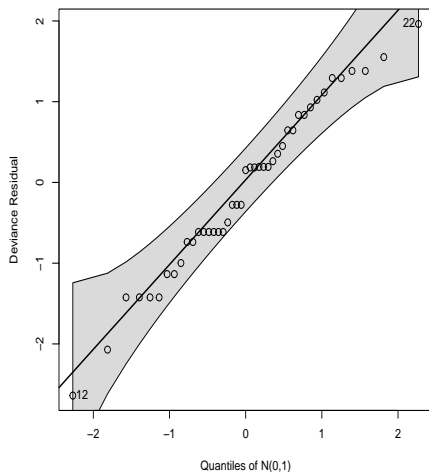
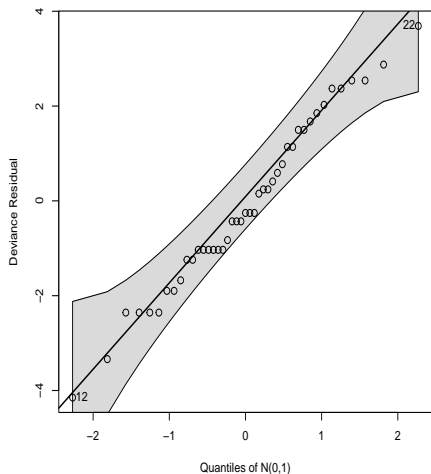




# Distribuições preditivas para os dois modelos



# QQplot para os dois modelos (Poisson (E) e BN (D))



# Crêterios de informação

Modelo	DIC	WAIC	CPO	MLIK
Poisson	353,91	356,09	178,05	-178,54
Binomial-Negativo	313,63	313,59	156,80	-158,71

# Comentários

- Os resultados indicam (CI) uma melhor adequação do modelo BN aos dados.
- Não somente isso, mas os resíduos indicam um ajuste mais apropriado (comportamento mais próximo do esperado).
- A predição dos dados sob o modelo BN é substancialmente melhor do que aquela sob o modelo Poisson.

# Estimativas pontuais de $\lambda$ , para cada modelo

Modelo	EAP	MeAP	DPAP	IC(95%)	HPD(95%)
Poisson	26,05	26,03	0,77	[24,56;27,60]	[24,54;27,57]
BN	26,10	26,06	1,40	[23,45;28,96]	[23,38; 28,88]

Note que, apesar das estimativas pontuais serem próximas, a precisão associada à inferência sob o modelo de Poisson é enganosamente maior do que, de fato, o é.

# Voltando aos dados sobre número de acidentes (comparação entre 1961 e 1962)

- Modelo 1: Considere ( $i = 1$ , ano de 1961,  $i = 2$ , ano de 1962). Lembrando que: 1961 (sem limite de velocidade) 1962 (com limite de velocidade), temos

$$Y_{ij}|\beta \stackrel{ind.}{\sim} \text{Poisson}(\mu_i), i = 1, 2, j = 1, \dots, 43$$

$$\ln \mu_i = \beta_0 + \beta_i, \beta_1 = 0$$

em que  $\beta = (\beta_0, \beta_2)'$ . Assim, tem-se que  $\mathcal{E}(Y_{ij}|\beta) = \mathcal{V}(Y_{ij}|\beta) = e^{\beta_0 + \beta_i}$ .

## Cont.

- Modelo 2: Considere ( $i = 1$ , ano de 1961,  $i = 2$ , ano de 1962).

Lembrando que: 1961 (sem limite de velocidade) 1962 (com limite de velocidade), temos

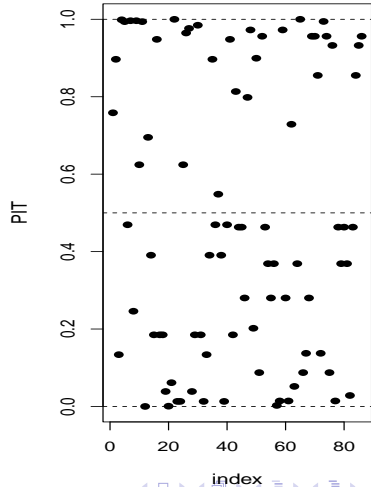
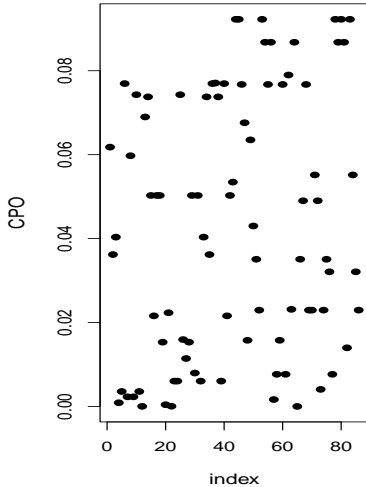
$$Y_{ij} | (\boldsymbol{\beta}, \phi) \stackrel{ind.}{\sim} \text{BN}(\mu_i, \phi), i = 1, 2, j = 1, \dots, 43$$

$$\ln \mu_i = \beta_0 + \beta_i, \beta_1 = 0$$

em que  $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_2)'$ . Assim, tem-se que  $\mathcal{E}(Y_{ij} | \boldsymbol{\beta}) = \mu_{ij} = e^{\beta_0 + \beta_i}$ ,

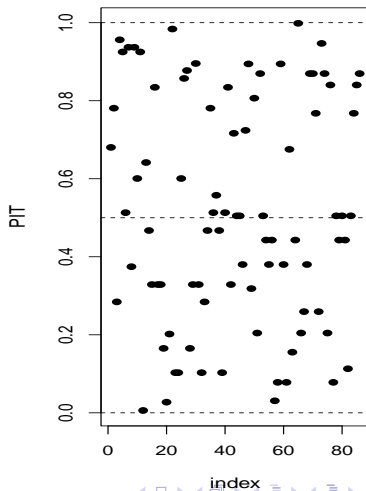
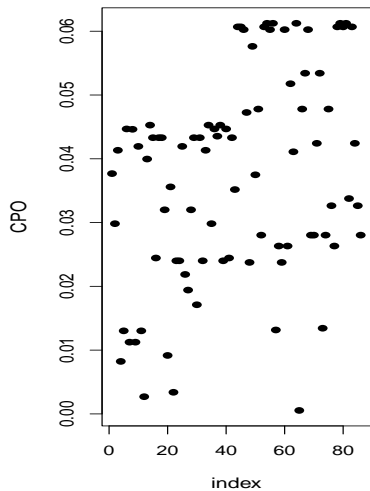
$$\mathcal{V}(Y_{ij} | \boldsymbol{\beta}) = \mu_{ij} + \frac{\mu_{ij}^2}{\phi}.$$

# CPO e PIT (Poisson)

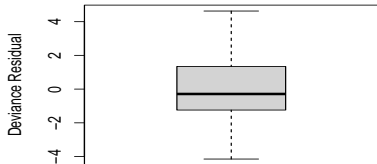
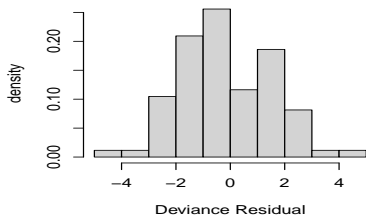
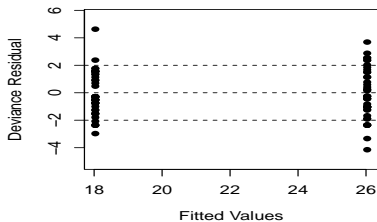
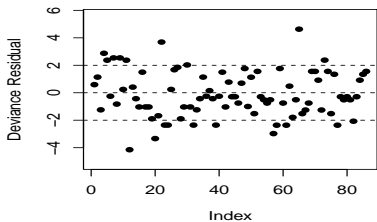




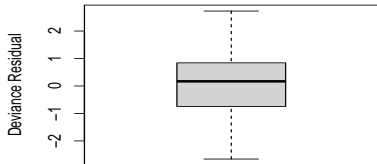
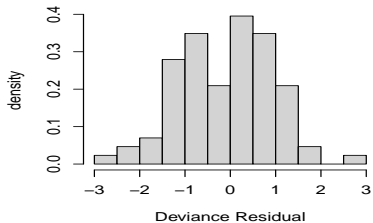
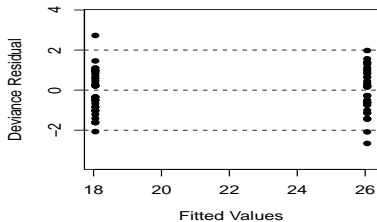
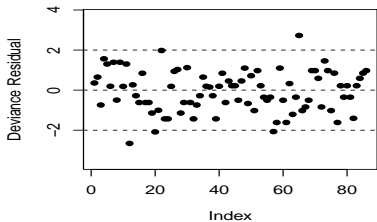
# CPO e PIT (BN)



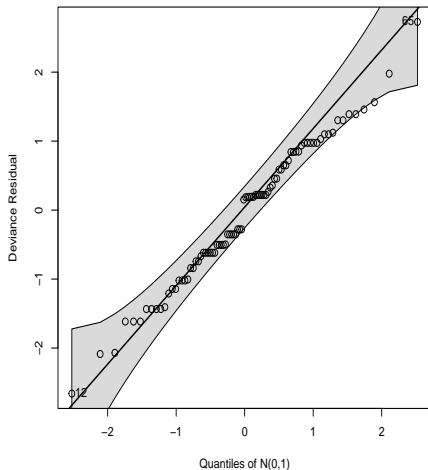
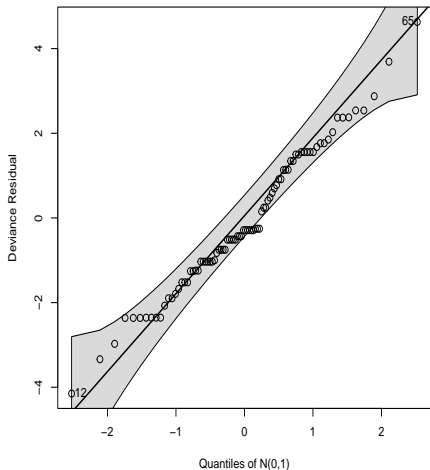
# Diagnóstico dos resíduos (Poisson)



# Diagnóstico dos resíduos (BN)

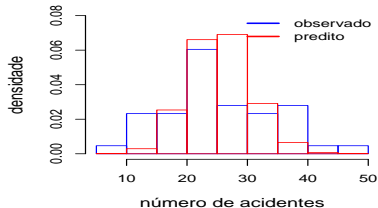


# QQplot para os dois modelos (Poisson (E) e BN(D))

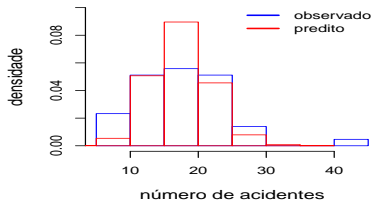


# Dados observados e distribuições preditivas

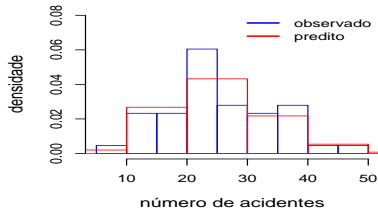
Poisson – 1961



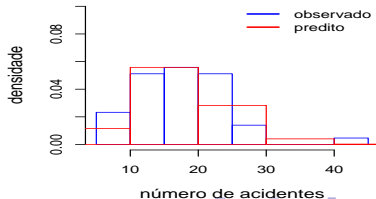
Poisson – 1962



BN – 1961



BN – 1962



# Crêterios de informação

Modelo	DIC	WAIC	CPO	MLIK
Poisson	656,94	660,61	330,31	-335,84
Binomial-Negativa	595,37	595,44	297,73	-305,16

# Comentários

- Os resultados indicam (CI) uma melhor adequação do modelo BN aos dados.
- Não somente isso, mas os resíduos indicam um ajuste mais apropriado (comportamento mais próximo do esperado).
- A predição dos dados sob o modelo BN é substancialmente melhor do que aquela sob o modelo Poisson.

# Estimativas pontuais de $\lambda_i$ (médias), para cada modelo

Modelo	Ano	EAP	MeAP	DPAP	IC(95%)	HPD(95%)
Poisson	1961	26,03	26,03	1,39	[23,52;28,89]	[23,50 ; 28,89]
	1962	18,09	18,05	1,00	[16,17;20,05]	[16,16; 20,01]
BN	1961	26,10	25,99	1,40	[23,49;28,92]	[23,31 ;28,68]
	1962	18,06	18,03	1,05	[16,09;20,20]	[15,85; 19,90]

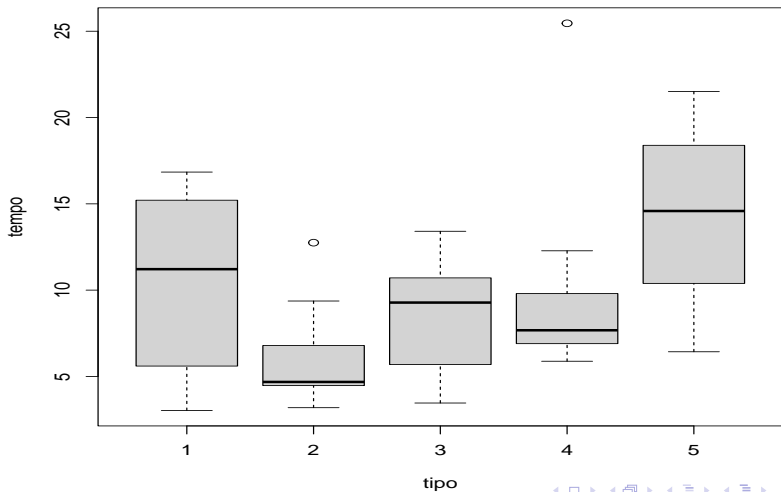
Note que, apesar das estimativas pontuais serem próximas, a precisão associada à inferência sob o modelo de Poisson é enganosamente maior do que, de fato, o é.



# Voltando ao exemplo da potência de turbinas de aviões

- Vamos considerar os 5 tipos de turbinas analisados no experimento, doravante tipos 1, 2, 3, 4 e 5.
- $n_i = 10, \forall i$  (tamanho amostral por grupo).
- $y_{ij}$  : tempo de vida (em milhões de ciclos) da  $j$ -ésima turbina do  $i$ -ésimo tipo.
- Suposição:  $Y_{ij} | (\boldsymbol{\beta}, \phi) \stackrel{ind.}{\sim} \text{gama}(\mu_i, \phi), i = 1, 2, 3, 4, 5$  e  
 $j = 1, 2, \dots, n_i, \boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5)'$ , em que  $\mathcal{E}(Y_{ij} | \boldsymbol{\theta}) = \mu_i$ ,  
 $\mathcal{V}(Y_{ij} | \boldsymbol{\theta}) = \frac{\mu_i^2}{\phi}, \boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\beta}, \phi)'$ ,  $\phi$  é chamado de parâmetro de precisão e  $\ln \mu_i = \beta_0 + \beta_i, \beta_1 = 0$ .

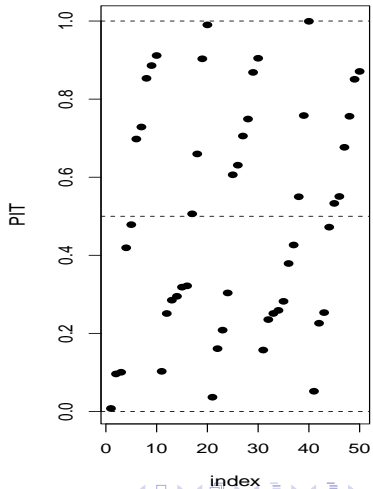
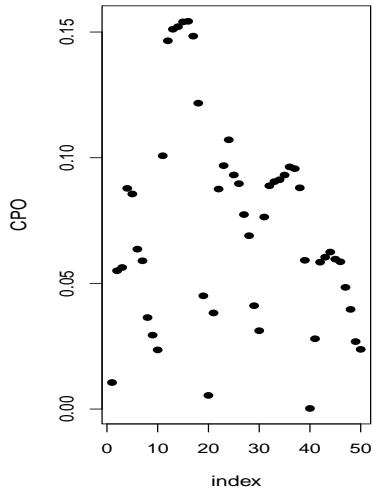
# Box-plots



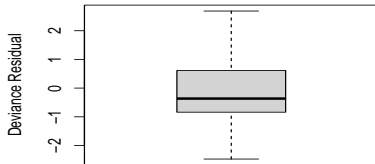
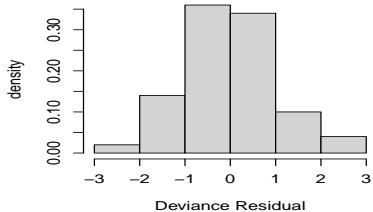
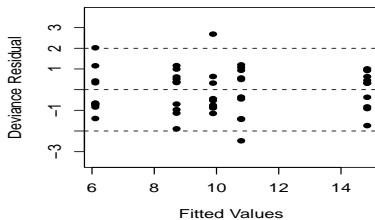
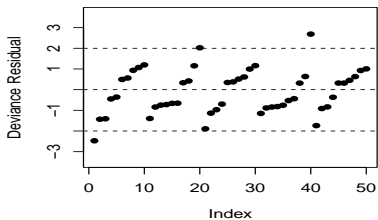
# Medidas resumo

Tipo	media	dp	vari	cv	min	med	max	ca	curt
1	10,69	4,82	23,23	45,07	3,03	11,21	16,84	-0,24	1,72
2	6,05	2,92	8,50	48,18	3,19	4,68	12,75	1,40	3,82
3	8,64	3,29	10,83	38,10	3,46	9,28	13,41	-0,10	1,83
4	9,80	5,81	33,71	59,26	5,88	7,68	25,46	2,21	6,60
5	14,71	4,86	23,65	33,07	6,43	14,59	21,51	-0,15	2,05

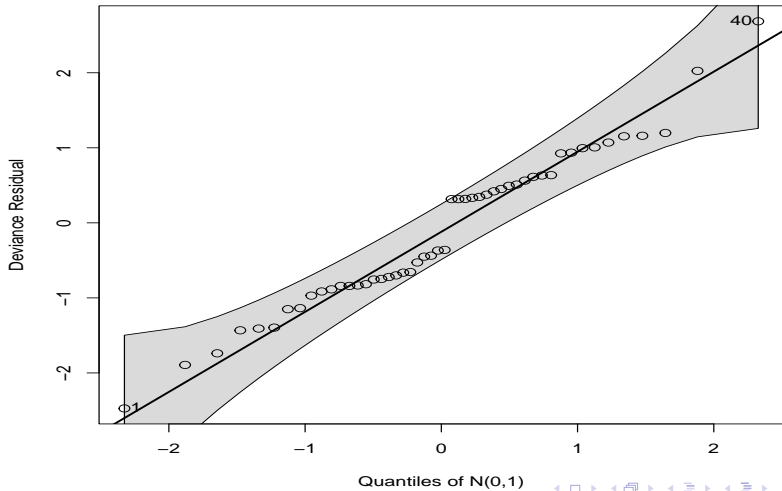
# CPO e PIT



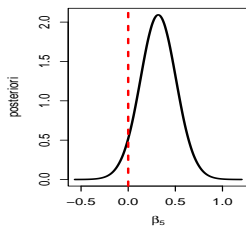
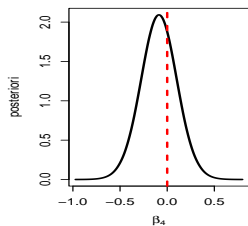
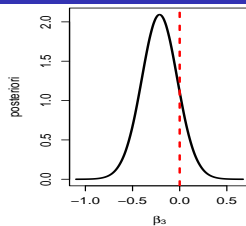
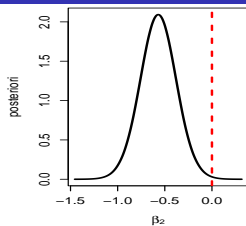
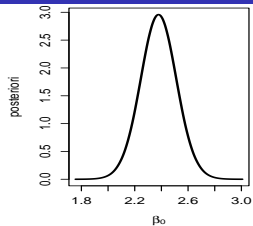
# Diagnóstico dos resíduos



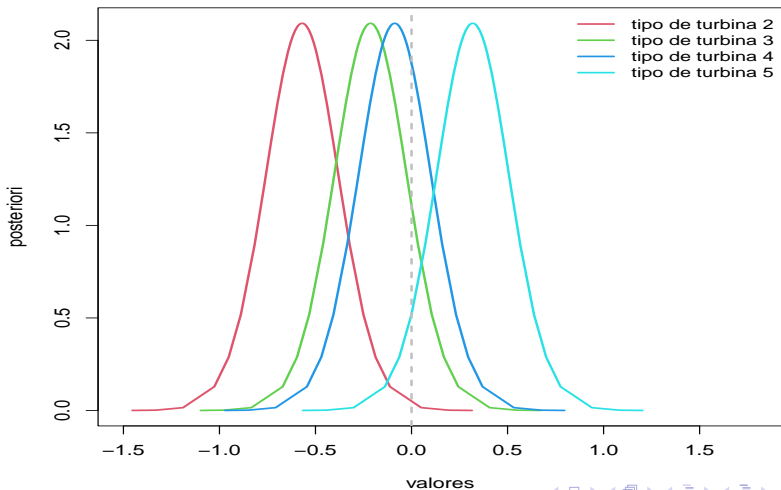
# QQplot dos resíduos



# Posteriors dos parâmetros de regressão

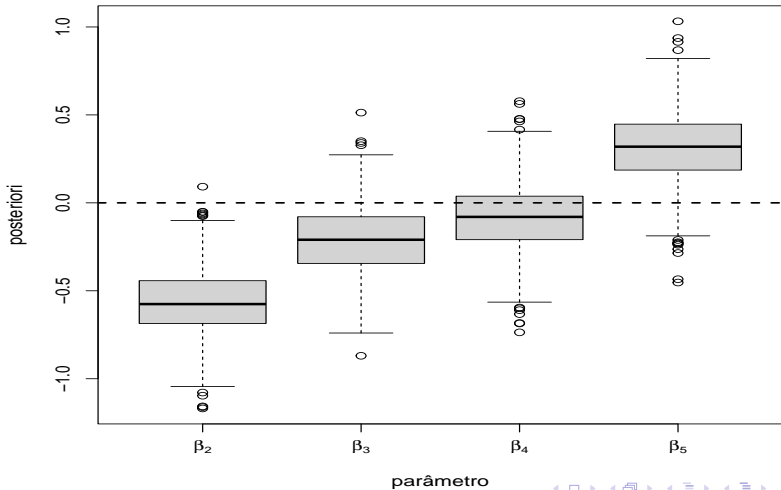


# Posteriors dos parâmetros de regressão

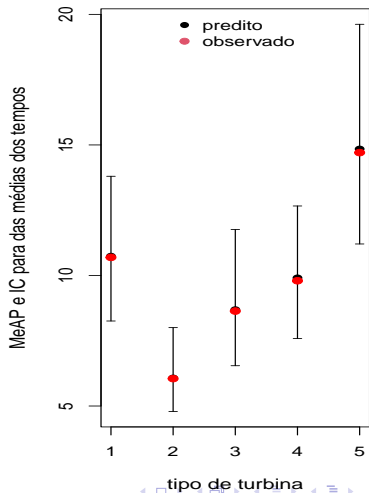
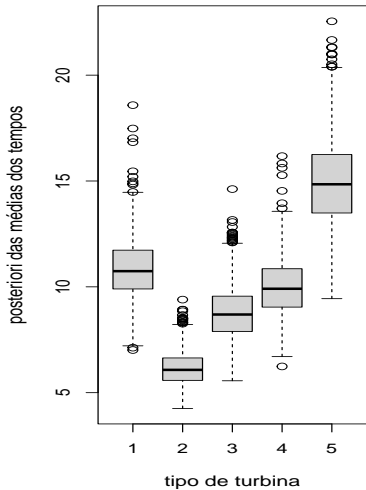




# Posteriors dos parâmetros de regressão



# Posteriors das médias previstas



# Comentários

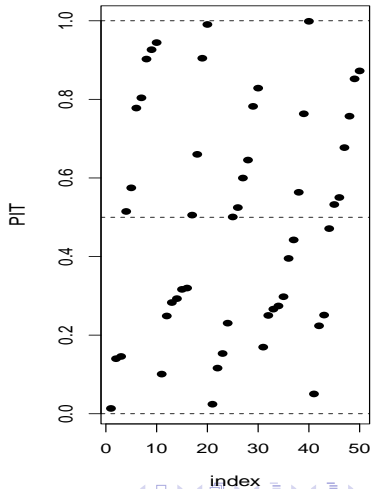
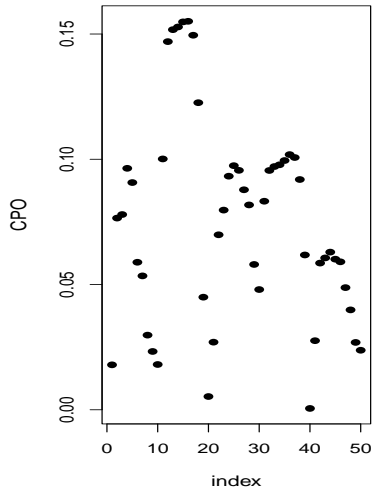
- O modelo se ajustou bem aos dados, tanto do ponto de vista de análise residual quanto de análise preditiva (médias da potência).
- As turbinas do tipo 1, 3 e 4 parecem ter desempenhos semelhantes.
- Vamos comparar três modelos: o original e dois reduzidos.

## Comparação de modelos

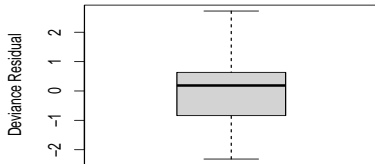
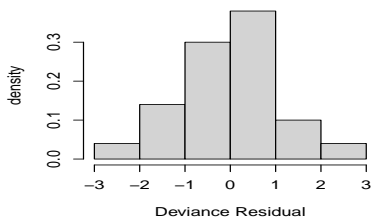
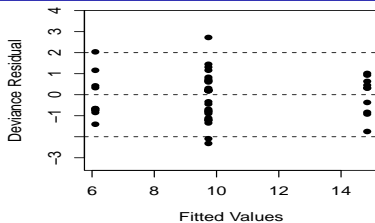
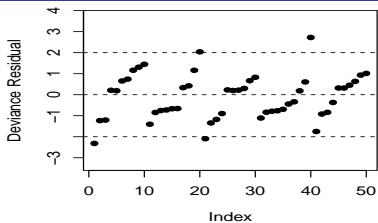
Modelo	DIC	WAIC	CPO	MLIK
(1) Inicial	286,00	287,42	144,07	-163,16
(2) Tipo 1 = Tipo 4 ( $\beta_4 = 0$ )	284,16	284,65	142,45	-158,17
(3) Tipo 1 = Tipo 3 = Tipo 4 ( $\beta_3 = \beta_4 = 0$ )	283,21	283,77	141,99	-153,45

Os modelos 2 e 3 foram melhores do que o modelo 1. Por outro lado, uma vez que a diferença à favor do modelo 3 é módica, em relação ao modelo 2, adotaremos o critério da “simplicidade” ficando, assim, com o modelo 3.

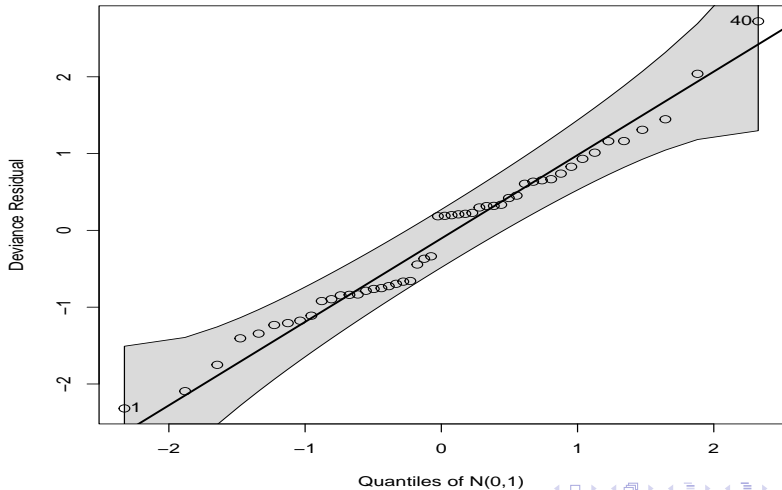
# CPO e PIT



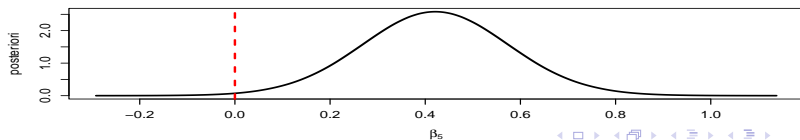
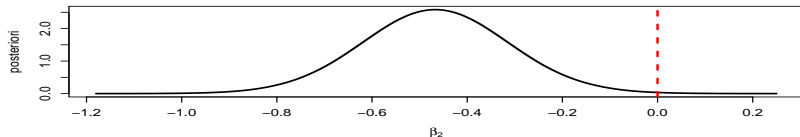
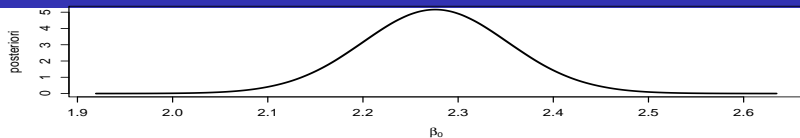
# Diagnóstico dos resíduos



# QQplot dos resíduos

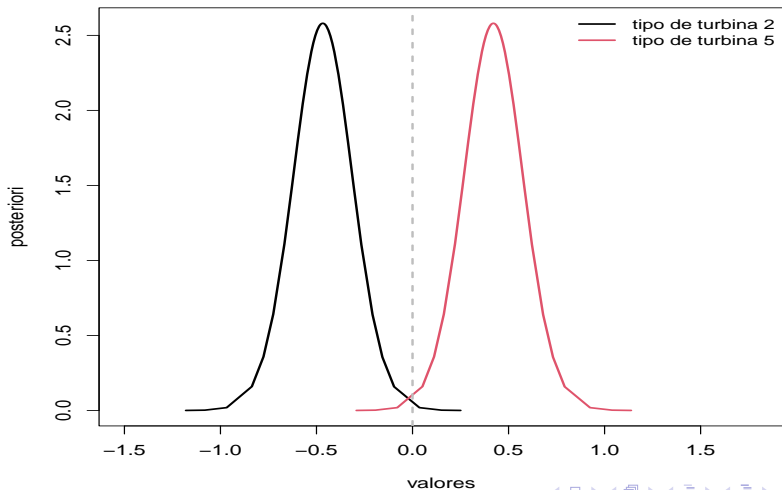


# Posterioris dos parâmetros de regressão

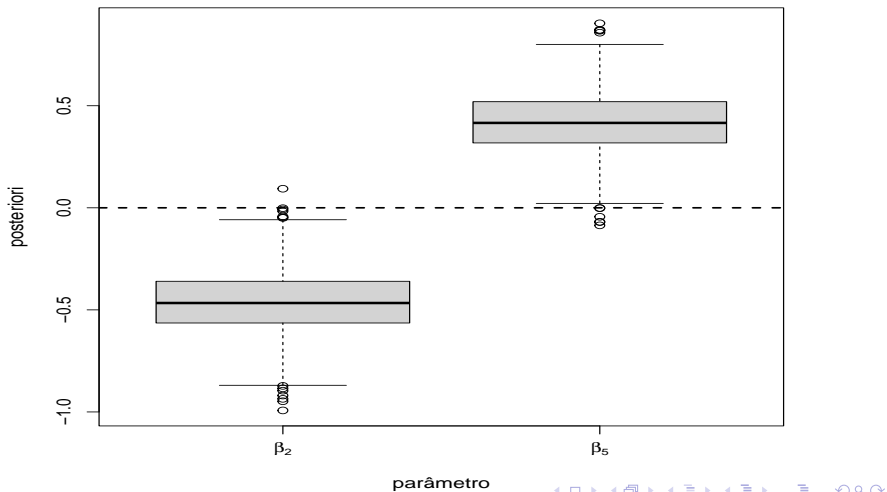




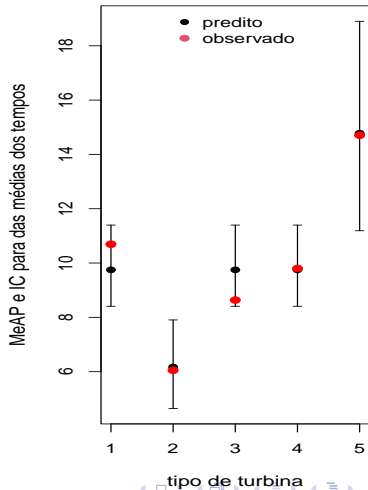
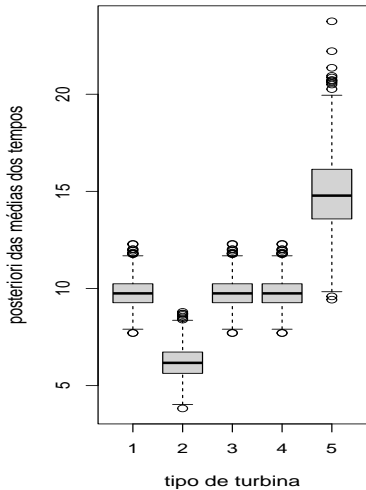
# Posteriors dos parâmetros de regressão



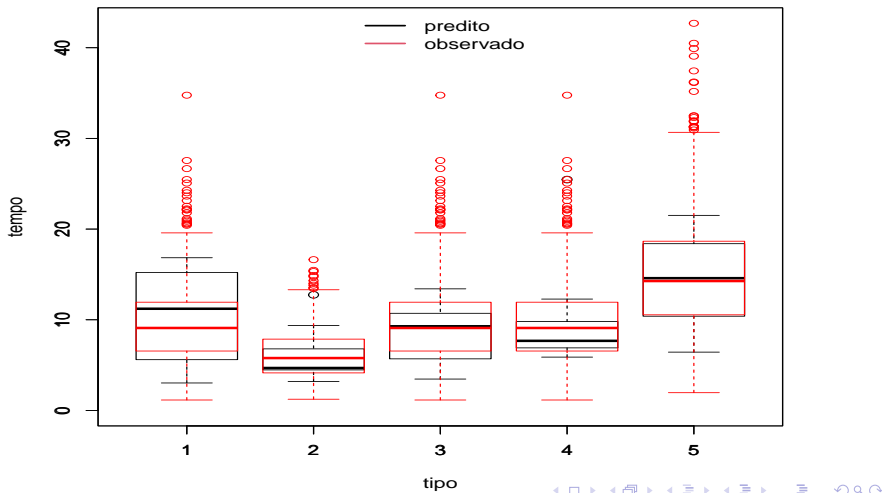
# Posteriors dos parâmetros de regressão



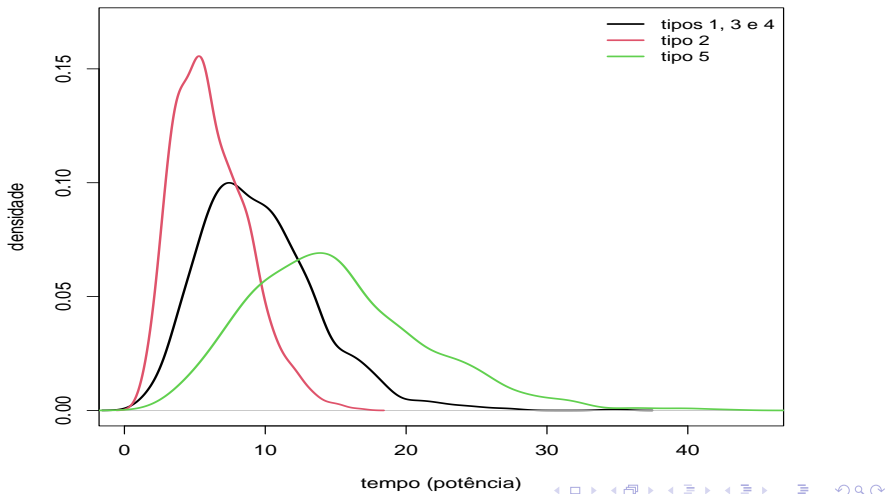
# Posteriores das médias previstas



# Valores observados e preditos



# Densidades previstas



# Médias previstas

Tipo	MeAP	DPAP	HPD(95%)
1,3,4	9,77	0,79	[8,33 ; 11,39]
2	6,04	0,83	[4,63 ; 7,78]
5	14,83	1,98	[11,32 ; 18,99]

Os tipos de turbina com melhor e pior desempenho são, respectivamente a 5 e a 2, sendo os tipo 1,3,4 equivalentes entre si, e com desempenho intermediário em relação aos outros dois tipos.