1. Questão 1

   (a) Temos que (seja $y_i = -\ln x_i$)

   $$L(\theta) \propto \theta^{-n} \exp\left\{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}(-\ln x_i)\right\} = \theta^{-n} \exp\left\{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} y_i\right\},$$

   que se assemelha ao núcleo de uma distribuição $IG(n+1, n\overline{y})$, $\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$. Logo a família conjugada de prioris para o modelo em questão é a distribuição $IG(a, b)$, (ou seja, $p^c(\theta) \propto \theta^{-(a+1)} \exp\left\{-\frac{b}{\theta}\right\}$). Além disso, temos que:

   $$p(\theta|\boldsymbol{x}) \propto \theta^{-n} \exp\left\{-\frac{1}{\theta}n\overline{y}\right\} \theta^{-(a+1)} \exp\left\{-\frac{b}{\theta}\right\} \mathbb{1}_{(0,\infty)} = \theta^{-(n+a+1)} \exp\left\{-\frac{b+n\overline{y}}{\theta}\right\} \mathbb{1}_{(0,\infty)}$$

   Logo $\theta|\boldsymbol{x} \sim IG(n+a, b+n\overline{y})$.

   (b) Temos que

   $$\begin{aligned} l(\theta) &= -n\ln\theta - \frac{n\overline{y}}{\theta}; S(\theta) = -\frac{n}{\theta} + \frac{n\overline{y}}{\theta^2}; H(\theta) = \frac{n}{\theta^2} - \frac{2n\overline{y}}{\theta^3} \\ I(\theta) &= -\frac{n}{\theta^2} + \frac{2n\theta}{\theta^3} = \frac{n}{\theta^2} \end{aligned}$$

   Logo

   $$p^J(\theta) \propto \theta^{-1}\mathbb{1}_{(0,\infty)}.(\theta)$$

   Portanto,

   $$p(\theta|\boldsymbol{x}) \propto \theta^{-n} \exp\left\{-\frac{1}{\theta}n\overline{y}\right\} \theta^{-1}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(\theta) = \theta^{-(n+1)} \exp\left\{-\frac{1}{\theta}n\overline{y}\right\}.$$

   Assim, $\theta|\boldsymbol{x} \sim IG(n, n\overline{y})$.

   (c) Dos itens a) e b) (e fazendo a=1,b=0), temos que:

   $$\mathcal{V}^c(\theta|\boldsymbol{x}) = \frac{n^2\overline{y}^2}{n^2(n-1)}; V^J(\theta|\boldsymbol{x}) = \frac{n^2\overline{y}}{(n-1)^2(n-2)}, \tag{1}$$

   Logo

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathcal{V}^c}{\mathcal{V}^J} &= \frac{(n-1)^2(n-2)}{n^2(n-1)} > 1 \leftrightarrow \frac{(n-1)(n-2)}{n^2} > 1 \leftrightarrow n^2 - 2n - n + 2 > n^2 \\
&\leftrightarrow -3n > -2 \leftrightarrow n < 2/3.
\end{aligned}
$$

Dessa forma $\forall n \geq 1$, $\mathcal{V}^c < V^J$ e, assim p^c é preferível à p^J.

(d) Do item b) e do formulário, temos que $2n\overline{y}\theta^{-1}|\boldsymbol{x} \sim \chi^2_{(2n)}$. Por outro lado:

$$
\begin{aligned}
P\left(q_1 < 2n\overline{y}\theta^{-1} < q_2|\boldsymbol{x}\right) &= \gamma \leftrightarrow P\left(\frac{q_1}{2n\overline{y}} < \theta^{-1} < \frac{q_2}{2n\overline{y}}|\boldsymbol{x}\right) = \gamma \\
&\leftrightarrow P\left(\frac{2n\overline{y}}{q_2} < \theta < \frac{2n\overline{y}}{q_1}|\boldsymbol{x}\right) = \gamma.
\end{aligned}
$$

Assim, $IC_B(\theta, \gamma) = \left[\frac{2n\overline{y}}{q_2}; \frac{2n\overline{y}}{q_1}\right]$, em que $P(X < q_1) = \frac{1-\gamma}{2}$ e $P(X > q_2) = \frac{1-\gamma}{2}$, $X \sim \chi^2_{(2n)}$.

2. Questão 2

   (a) Temos que

$$L(\boldsymbol{\theta}) \propto e^{-\lambda}\lambda^{x}\phi^{x}\,(1-\phi)^{y}\,I_{I\!R^{+}}(\lambda)1\!\!1_{(0,1)}(\phi),$$

   que se assemelha ao produto dos núcleos de uma dist. $gama(x+1,1)$ e de uma dist. $beta(x+1,y+1)$. Logo, a família conjugada de prioris é o produto de uma dist. $gama(a,b)$ com uma $beta(c,d)$.

   (b) Do próprio enunciado, temos que

$$p(x,|\boldsymbol{\theta}) = p(x|\boldsymbol{\theta})p(y|x,\boldsymbol{\theta}),$$

   em que $p(x|\boldsymbol{\theta}) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}1\!\!1_{\{0,1,....\}}(x)$ e $p(y|x,\boldsymbol{\theta}) = \left(\begin{array}{c} y+x-1 \\ y \end{array}\right)\phi^{x}\,(1-\phi)^{y}\,1\!\!1_{\{0,1,2,...\}}(y)$ as quais, respectivamente, correspondem à $X|\boldsymbol{\theta} \sim Poisson(\lambda)$ e $Y|(x,\boldsymbol{\theta}) \sim BN(x,\phi)$. Por outro lado, temos que:

$$\begin{aligned}
l(\boldsymbol{\theta}) &= c + -\lambda + x\ln\lambda + x\ln\phi + y\ln(1-\phi) \\
S(\lambda) &= -1 + \frac{x}{\lambda}; S(\phi) = \frac{x}{\phi} - \frac{y}{1-\phi} \\
H(\lambda,\lambda) &= -\frac{x}{\lambda^{2}}; H(\phi,\phi) = -\frac{x}{\phi^{2}} - \frac{y}{(1-\phi)^{2}}; H(\lambda,\phi) = 0 \\
I(\lambda,\lambda) &= \frac{1}{\lambda}; I(\phi,\phi) = \frac{\lambda}{\phi^{2}} + \frac{\lambda}{\phi(1-\phi)} = \lambda\left(\frac{1-\phi+\phi}{\phi^{2}(1-\phi)}\right) = \frac{\lambda}{\phi^{2}(1-\phi)}; I(\lambda,\phi) = 0.
\end{aligned}$$

   Portanto,

$$p^{J}(\boldsymbol{\theta}) \propto \phi^{-1}(1-\phi)^{-1/2}1\!\!1_{(0,1)}(\phi)1\!\!1_{I\!R^{+}}(\lambda)$$

(c) Temos que:

$$
\begin{aligned}
p(x,y|\phi) &= \int_0^{\infty} p(x,y|\phi,\lambda)g(\lambda)d\lambda = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}\left(\begin{array}{c} y+x-1 \\ y \end{array}\right)\phi^x\,(1-\phi)^y\,e^{-\lambda}d\lambda \\
&= \frac{\phi^x\,(1-\phi)^y}{x!}\left(\begin{array}{c} y+x-1 \\ y \end{array}\right)\int_0^{\infty} e^{-2\lambda}\lambda^x d\lambda = \frac{\phi^x\,(1-\phi)^y}{x!}\left(\begin{array}{c} y+x-1 \\ y \end{array}\right)\frac{\Gamma(x+1)}{2^{x+1}} \\
&= \frac{\phi^x\,(1-\phi)^y}{2^{x+1}}\left(\begin{array}{c} y+x-1 \\ y \end{array}\right) \\
p_1(x,y) &= \int_0^1 p(x,y|\phi)h_1(\phi)d\phi = \int_0^1 \frac{\phi^x\,(1-\phi)^y}{2^{x+1}}\left(\begin{array}{c} y+x-1 \\ y \end{array}\right)d\phi \\
&= \frac{1}{2^{x+1}}\left(\begin{array}{c} y+x-1 \\ y \end{array}\right)\int_0^1 \phi^x\,(1-\phi)^y d\phi = \frac{1}{2^{x+1}}\left(\begin{array}{c} y+x-1 \\ y \end{array}\right)\beta(x+1,y+1) \\
&= \frac{1}{2^{x+1}}\left(\begin{array}{c} y+x-1 \\ y \end{array}\right)\frac{\Gamma(x+1)\Gamma(y+1)}{\Gamma(x+y+2)} = \frac{1}{2^{x+1}}\frac{(y+x-1)!}{y!(x-1)!}\frac{x!y!}{(x+y+1)!} = \frac{x}{2^{x+1}}
\end{aligned}
$$

3. Questão 3

   (a) Aparentemente, as variáveis domic, perc, custo, nacbo, impactam a resposta, uma vez que os respectivos diagramas de dispersão parecem indicar relações: linear crescente, parabólica, linear crescente e linear crescente, respectivamente. Para as demais, a menos de uma estrutura não paramétrica, não parece haver nenhuma tendência aparente.

   (b) Apesar da previsão ter sido razoável, com os valores observados e preditos, em parte, apresentando uma aparente correlação positiva, o gráfico de quantil quantil aponto mal ajuste, com resíduos saindo das bandas de confiança (embora não se espere, necessariamente, normalidade dos resíduo componente do desvio, mesmo sob o bom ajuste do modelo) e presença de tendência. Com relação à Figura 3, observa-se uma assimetria negativa dos resíduos, com poucos outliers. Enquanto que o primeiro comportamento poderia indicar mal ajuste, o segundo indicaria bom ajuste. Em suma, o modelo parece não ter se ajustado bem aos dados.

   (c) Pelo comportamento dos IC's e das posterioris dos parâmetros, conjectura-se que apenas os parâmetros β_3 e β_7 não são significativos, uma vez que o valor zero está bem imerso (bem próximo das respectivas EAP's) nos respectivos IC's. Para os outros parâmetros, ou os IC's não contem o zero ou este valor está muito próximo de um dos respectivos limites. Assim, aparentemente, somente as covariáveis percap e ntv parecem não afetar a resposta. Com efeito, em retirando-se essas covariáveis do modelo, a significância das outras covariáveis poderiam ficar mais realçadas.