

1. Questão 1

- Item a) - Lista 7: AR(3) com média μ : $Y_t = \delta + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \phi_3 Y_{t-3} + \epsilon_t$, em que $\delta = (1 - \phi_1 - \phi_2 - \phi_3)\mu$.
- Item d) - Lista 7: ARIMA(2,1,0) com média μ : Seja $X_t = (1 - B)(Y_t - \mu)$, temos que

$$\phi(B)X_t = \epsilon_t$$

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \epsilon_t$$

$$(1 - B)(Y_t - \mu) = \phi_1(1 - B)(Y_{t-1} - \mu) + \phi_2(1 - B)(Y_{t-2} - \mu) + \epsilon_t$$

$$(Y_t - Y_{t-1}) = \phi_1(Y_{t-1} - Y_{t-2}) + \phi_2(Y_{t-2} - Y_{t-3}) + \epsilon_t$$

$$Y_t = (1 + \phi_1)Y_{t-1} - (\phi_1 + \phi_2)Y_{t-2} - \phi_2 Y_{t-3} + \epsilon_t.$$

- Item k) - Lista 7: SARMA(1,0)(1,0)_s com média μ :

$$(1 - \Phi_1 B^s - \phi_1 B + \phi_1 \Phi_1 B^{s+1})(Y_t - \mu) = \epsilon_t$$

$$Y_t = \delta + \Phi_1 Y_{t-s} + \phi_1 Y_{t-1} - \phi_1 \Phi_1 Y_{t-s-1} + \epsilon_t,$$

$$\text{em que } \delta = (1 - \Phi_1 - \phi_1 + \phi_1 \Phi_1)\mu.$$

2. Questão 2: Se Y_t é um processo causal, logo $E(Y_{t-k}\epsilon_t) = 0$ para $k > 0$, dito isso temos que:

$$(1 - \phi B)Y_t = (1 + \theta B)\epsilon_t$$

$$Y_t = \phi Y_{t-1} + \epsilon_t + \theta \epsilon_{t-1}$$

$$Y_t \epsilon_t = \phi Y_{t-1} \epsilon_t + \epsilon_t^2 + \theta \epsilon_{t-1} \epsilon_t$$

$$E(Y_t \epsilon_t) = \phi E(Y_{t-1} \epsilon_t) + E(\epsilon_t^2) + \theta E(\epsilon_{t-1} \epsilon_t) = E(\epsilon_t^2) = \sigma^2$$

$$Y_t \epsilon_{t-1} = \phi Y_{t-1} \epsilon_{t-1} + \epsilon_t \epsilon_{t-1} + \theta \epsilon_{t-1}^2$$

$$\begin{aligned} E(Y_t \epsilon_{t-1}) &= \phi E(Y_{t-1} \epsilon_{t-1}) + E(\epsilon_t \epsilon_{t-1}) + \theta E(\epsilon_{t-1}^2) \\ &= \phi E(Y_{t-1} \epsilon_{t-1}) + \theta E(\epsilon_{t-1}^2) = \phi \sigma^2 + \theta \sigma^2 = \sigma^2(\theta + \phi). \end{aligned}$$

Portanto, temos que:

$$Y_t = \phi Y_{t-1} + \epsilon_t + \theta \epsilon_{t-1}$$

$$Y_t^2 = \phi Y_t Y_{t-1} + Y_t \epsilon_t + \theta Y_t \epsilon_{t-1}$$

$$E(Y_t^2) = \phi E(Y_t Y_{t-1}) + E(Y_t \epsilon_t) + \theta E(Y_t \epsilon_{t-1})$$

$$\gamma(0) = \phi \gamma(1) + \sigma^2 + \theta(\theta + \phi)\sigma^2 \quad (*)$$

$$Y_t Y_{t-1} = \phi Y_{t-1}^2 + \epsilon_t Y_{t-1} + \theta \epsilon_{t-1} Y_{t-1}$$

$$E(Y_t Y_{t-1}) = \phi E(Y_{t-1}^2) + E(\epsilon_t Y_{t-1}) + \theta E(\epsilon_{t-1} Y_{t-1})$$

$$\gamma(1) = \phi \gamma(0) + \theta \sigma^2$$

Substituindo $\gamma(1)$ em (*):

$$\begin{aligned}
\gamma(0) &= \phi(\phi\gamma(0) + \theta\sigma^2) + \sigma^2 + \theta(\theta + \phi)\sigma^2 \\
&= \phi^2\gamma(0) + \phi\theta\sigma^2 + \sigma^2 + \theta(\theta + \phi)\sigma^2 \\
(1 - \phi^2)\gamma(0) &= \sigma^2(\phi\theta + 1 + \theta^2 + \theta\phi) \\
(1 - \phi^2)\gamma(0) &= \sigma^2(2\phi\theta + 1 + \theta^2) = \sigma^2(2\phi\theta + 1 + \theta^2 + \phi^2 - \phi^2) \\
(1 - \phi^2)\gamma(0) &= \sigma^2[(\phi + \theta)^2 + 1 - \phi^2] \\
\gamma(0) &= \sigma^2 \left[1 + \frac{(\phi + \theta)^2}{1 - \phi^2} \right]
\end{aligned}$$

Substituindo $\gamma(0)$ na equação de $\gamma(1)$:

$$\begin{aligned}
\gamma(1) &= \phi\gamma(0) + \theta\sigma^2 \\
\gamma(1) &= \phi\sigma^2 \left[1 + \frac{(\phi + \theta)^2}{1 - \phi^2} \right] + \theta\sigma^2 \\
\gamma(1) &= \sigma^2 \left[(\phi + \theta) + \frac{(\phi + \theta)^2\phi}{1 - \phi^2} \right], \\
\rho(1) &= \frac{\gamma(1)}{\gamma(0)} = \frac{(\phi + \theta)(1 + \phi\theta)}{1 + 2\phi\theta + \theta^2}.
\end{aligned}$$

E por fim, para $\gamma(k)$, $k \geq 2$, temos que:

$$\begin{aligned}
Y_t &= \phi Y_{t-1} + \epsilon_t + \theta\epsilon_{t-1} \\
Y_t Y_{t-k} &= \phi Y_{t-1} Y_{t-k} + \epsilon_t Y_{t-k} + \theta\epsilon_{t-1} Y_{t-k} \\
E(Y_t Y_{t-k}) &= \phi E(Y_{t-1} Y_{t-k}) + E(\epsilon_t Y_{t-k}) + \theta E(\epsilon_{t-1} Y_{t-k}) \\
\gamma(k) &= \phi\gamma(k-1) \\
\rho(k) &= \phi\rho(k-1) = \phi^2\rho(k-2) = \dots = \phi^{k-1}\rho(1) \\
&= \phi^{k-1} \frac{(\phi + \theta)(1 + \phi\theta)}{1 + 2\phi\theta + \theta^2}.
\end{aligned}$$

3. Questão 3: Através da Figura 1 nota-se que a série parece ser aproximadamente estacionária (sem tendência e variância constante). Através da FAC em 2 nota-se um decaimento exponencial tanto sazonal como puro, e pela FACP em 3 temos que os 3 primeiros lags são diferentes de 0 e que o 12º lag é também, já o restante é 0 pois estão dentro dos limites de Bartlett. Dito isso, um modelo apropriado para os dados seria o SARIMA(3,0,0)(1,0,0)₁₂ com média μ :

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \phi_3 B^3)(1 - \Phi B^{12})(Y_t - \mu) = \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim NID(0, \sigma^2).$$

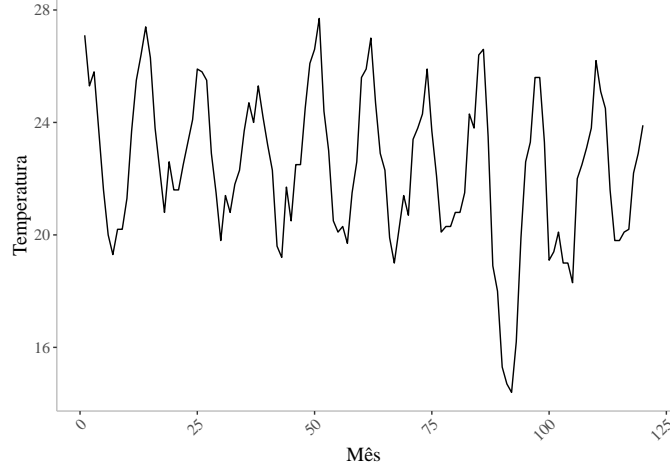


Figura 1: Gráfico da série de Ubatuba.

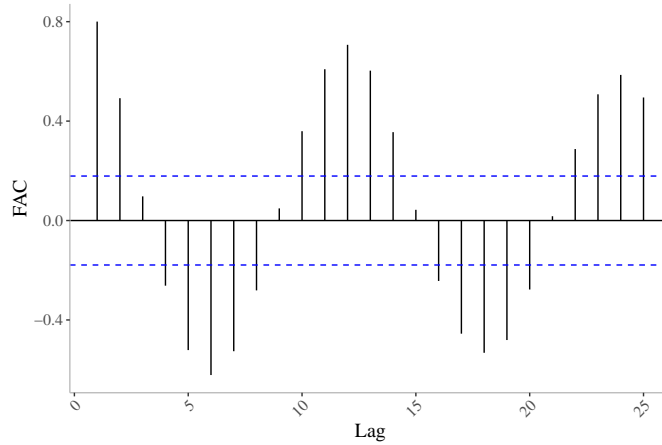


Figura 2: FAC da série de Ubatuba.

Através do diagnóstico na Figura 4 temos que os resíduos parecem ser ruído branco através da FAC (FAC amostrais dentro dos limites de Bartlett) e teste de Ljung-Box (valores-p > 0.05), além disso, a suposição de normalidade parece estar satisfeita pelo gráfico QQ normal (todos os pontos dentro das bandas de confiança). Através da Tabela 1 nota-se que todos os coeficientes são significativos a um nível de 10% de sig-

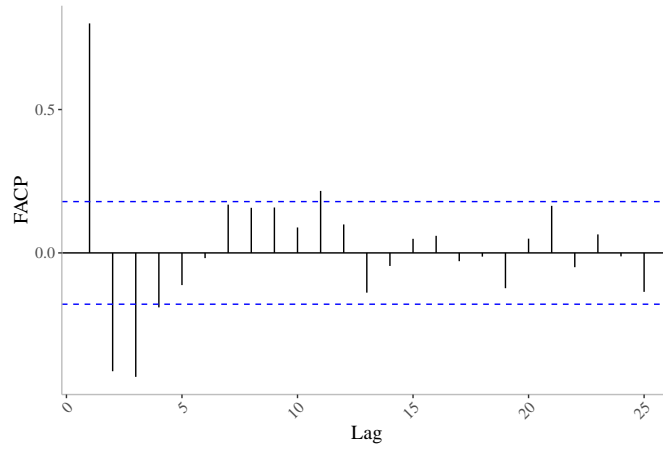


Figura 3: FACP da série de Ubatuba.

nificância, além disso nota-se que as raízes do polinômio autoregressivo $\phi(z) = 1 - 0.78z - 0.22z^2 + 0.37z^3 = 0$ são $z_1 = 1.12665 - 0.600071i$ e $z_2 = 1.12665 + 0.600071i$, e que $|z_1| = |z_2| = 1.27649 > 1$, e temos também que $|\Phi| = 0.53 < 1$, logo o modelo é estacionário e causal.

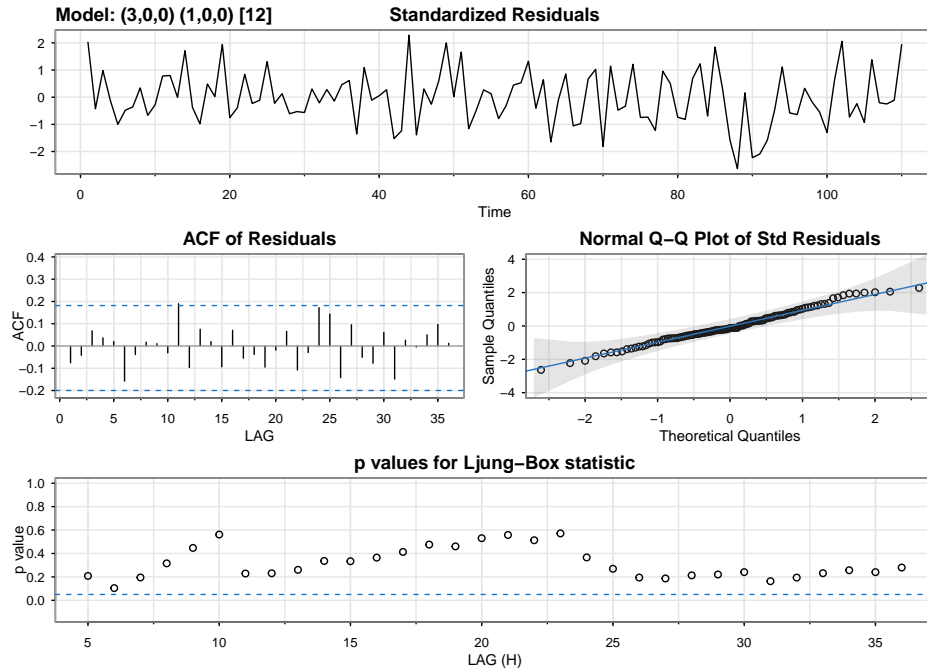


Figura 4: Diagnóstico do modelo SARIMA(3,0,0)(1,0,0)₁₂.

Tabela 1: Estimativas, EP e testes de significância para o modelo SARIMA(3,0,0)(1,0,0)₁₂ com média μ .

Coefficiente	Estimativa	EP	Estatística	Valor-p
ϕ_1	0.78	0.11	7.38	< 0.01
ϕ_2	0.22	0.12	1.83	0.07
ϕ_3	-0.37	0.09	-3.94	< 0.01
Φ	0.53	0.11	4.94	< 0.01
μ	22.45	0.58	38.73	< 0.01

Do ponto de vista preditivo, analisando as Figuras 5 e 6, o modelo se ajustou bem, pois a ST observada foi adequadamente predita pelo modelo e a previsão para uma janela futura, aparentemente, acompanha a trajetória da ST.

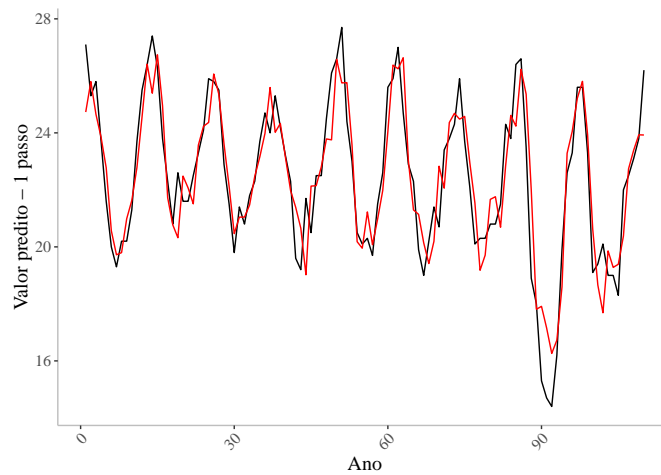


Figura 5: Previsão a 1 passo a frente do modelo $\text{SARIMA}(3,0,0)(1,0,0)_{12}$.

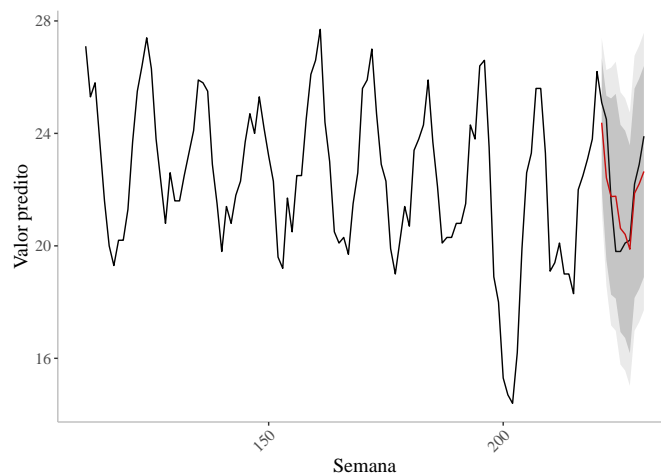


Figura 6: Previsão a 10 passos a frente do modelo $\text{SARIMA}(3,0,0)(1,0,0)_{12}$.

4. Questão 4: Através da Figura 7 nota-se que a série parece ser não estacionária (com tendência e variância não constante). Primeiramente, com o objetivo de estabilizar a variância da série, optou-se por fazer uma transformação logarítmica, cujo gráfico encontra-se na Figura 8, onde notamos uma variância mais estável no tempo. Devido a tendência da série e além disso, através das Figuras 9 e 10, nota-se que pelo comportamento da FAC (decaimento lento) e FACP (primeira FACP amostral próxima de 1) temos indícios de que a série precisa de diferenciação.

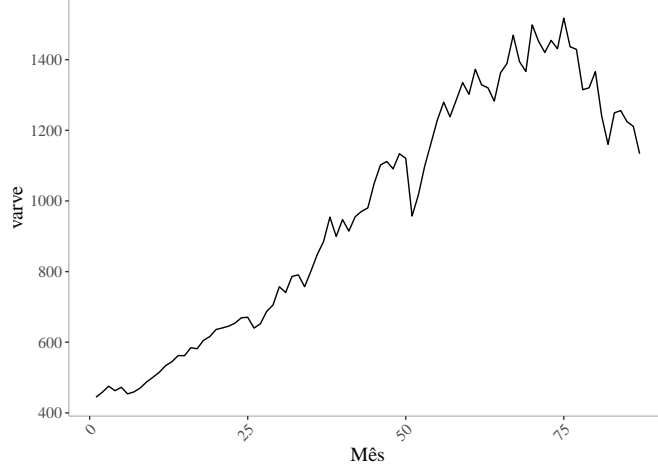


Figura 7: Gráfico da série de IBV-SP.

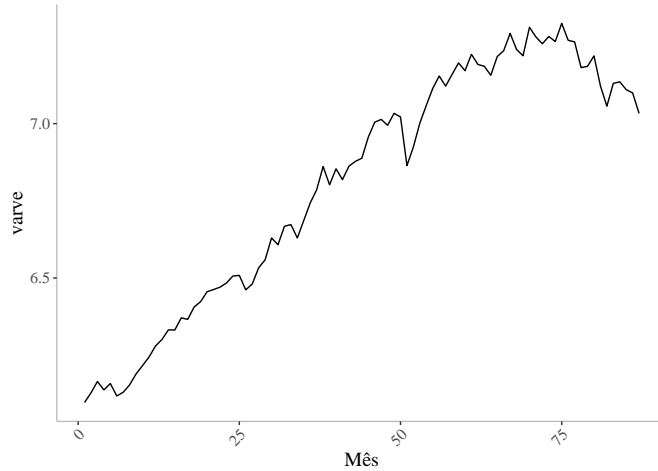


Figura 8: Gráfico da série log do IBV-SP.

Aplicando-se a primeira diferença na série, temos através da série em 11 que ela parece ser estacionária (sem tendência e variância constante no tempo). Além disso, através das Figuras 12 e 13, nota-se que temos indícios de que a série é ruído branco. Portanto, um modelo inicial seria o passeio aleatório com drift δ ou ARIMA(0,1,0) com drift δ :

$$(1 - B)Y_t = \delta + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim NID(0, \sigma^2)$$

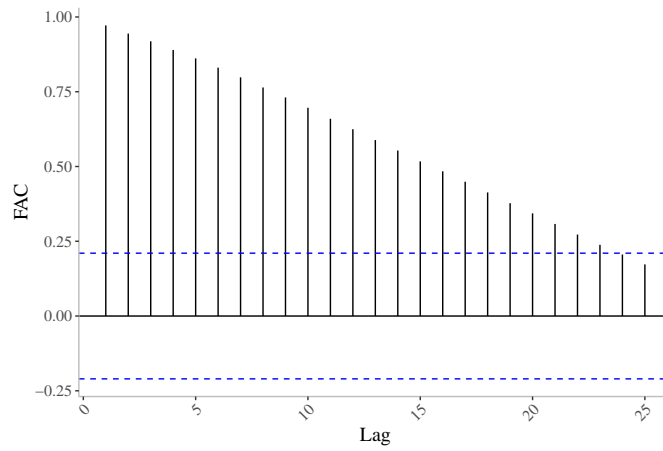


Figura 9: FAC da série log do IBV-SP.

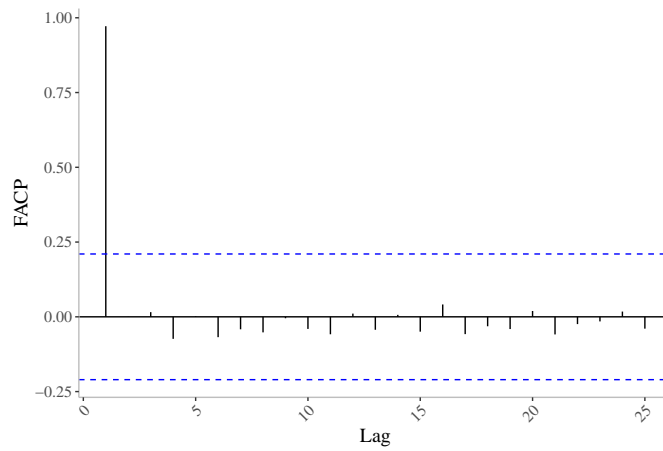


Figura 10: FACP da série log do IBV-SP.

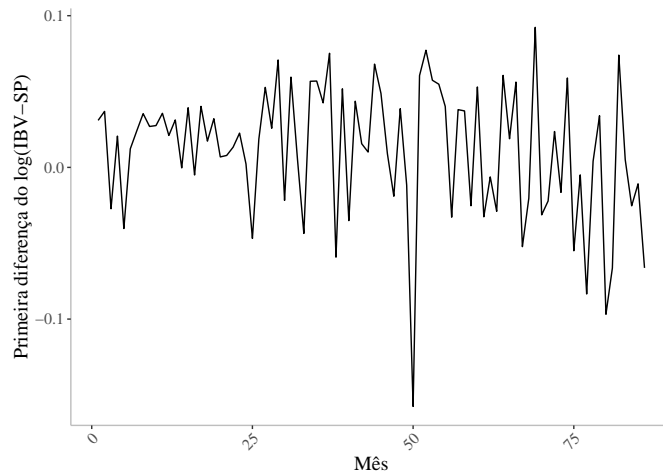


Figura 11: Gráfico da série diferenciada do log do IBV-SP.

Através do diagnóstico na Figura 14 temos que os resíduos parecem ser ruído branco através da FAC (FAC amostrais dentro dos limites de Bartlett) e teste de Ljung-Box (valores- $p > 0.05$), além disso a suposição de

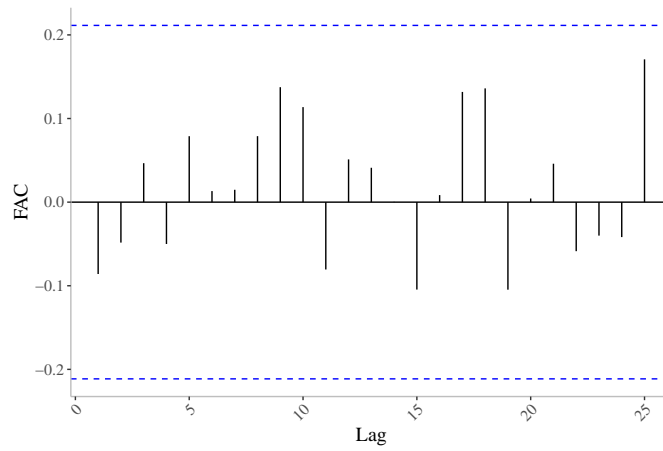


Figura 12: FAC da série diferenciada do log do IBV-SP.

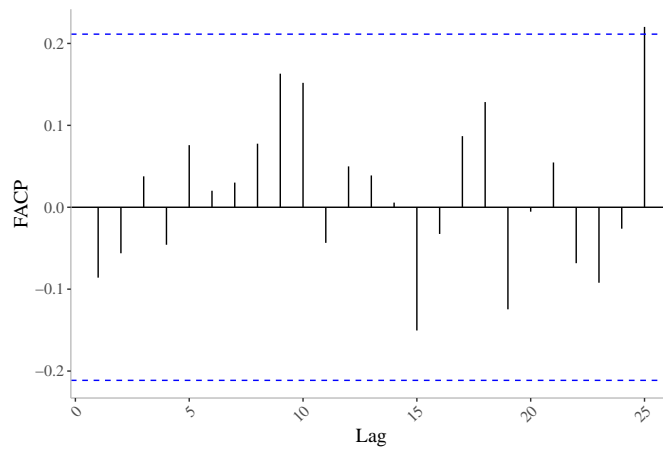


Figura 13: FACP da série diferenciada do log do IBV-SP.

normalidade parece estar satisfeita pelo gráfico QQ normal (todos os pontos dentro das bandas de confiança).

Do ponto de vista preditivo, analisando as Figuras 15 e 16, o modelo se ajustou bem, pois a ST observada foi adequadamente predita pelo modelo e a previsão para uma janela futura, aparentemente, acompanha a trajetória da ST como um todo (comportamento crescente).

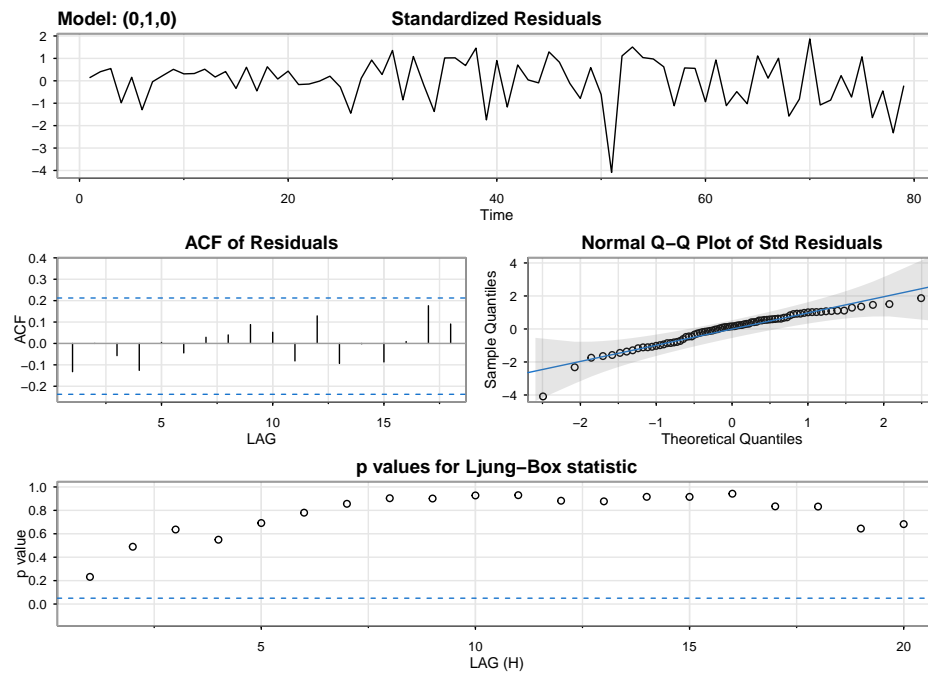


Figura 14: Diagnóstico do modelo ARIMA(0,1,0).

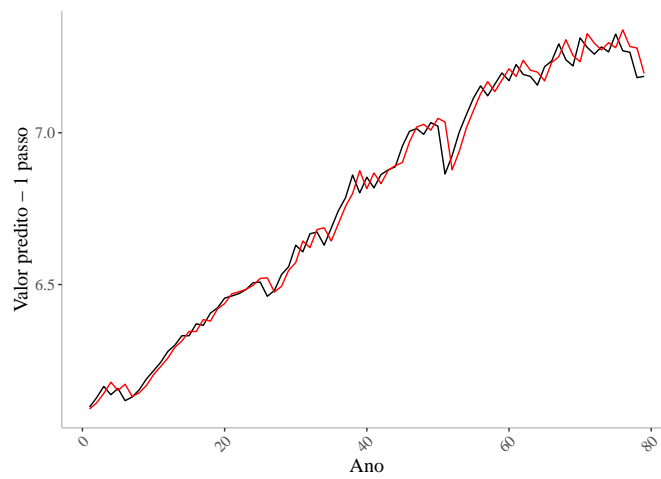


Figura 15: Previsão a 1 passo a frente do modelo ARIMA(0,1,0).

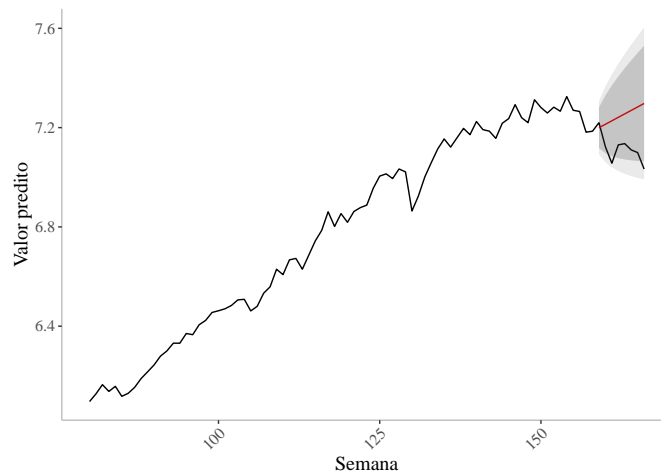


Figura 16: Previsão a 10 passos a frente do modelo ARIMA(0,1,0).

5. Questão 5: Através da Figura 17 nota-se que a série parece ser não estacionária (com tendência). Devido a tendência da série e além disso, através das Figuras 18 e 19, nota-se que pelo comportamento da FAC (decaimento lento) e FACP (primeira FACP amostral próxima de 1) temos indícios de que a série precisa de diferenciação.

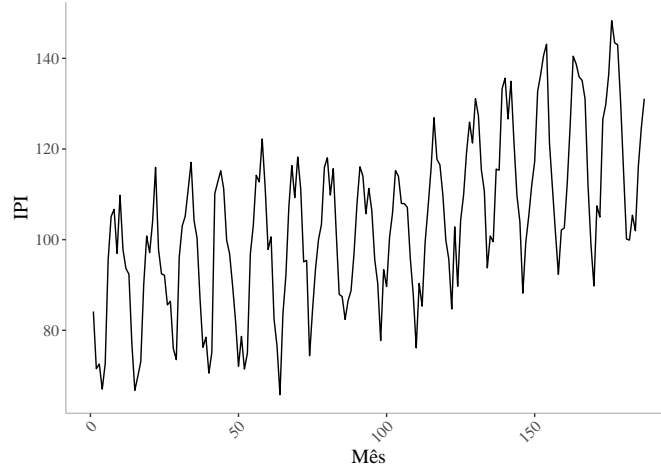


Figura 17: Gráfico da série de IPI.

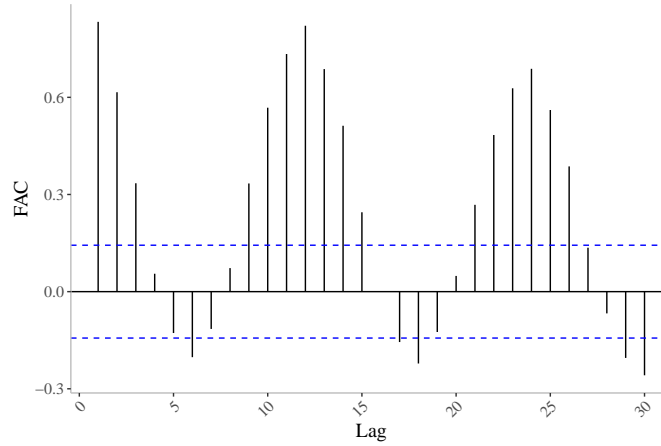


Figura 18: FAC da série IPI.

Aplicando-se a primeira diferença na série, temos através da série em 20 que ela parece ser estacionária (sem tendência e variância constante no tempo). Além disso, através das Figuras 21 e 22, nota-se que temos um decaimento exponencial na FAC nos lags sazonais (de 12 em 12) e para a FACP nota-se um decaimento mais lento, sendo assim uma estrutura difícil de identificar por essas ferramentas. Portanto, fez-se uma seleção de modelos através da análise residual, e dessa forma selecionou-se o SARIMA(2,1,0)(1,0,1)₁₂ com drift δ :

$$(1 - \Phi B^{12})(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2)(1 - B)Y_t = \delta + (1 + \Theta B^{12})\epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim NID(0, \sigma^2)$$

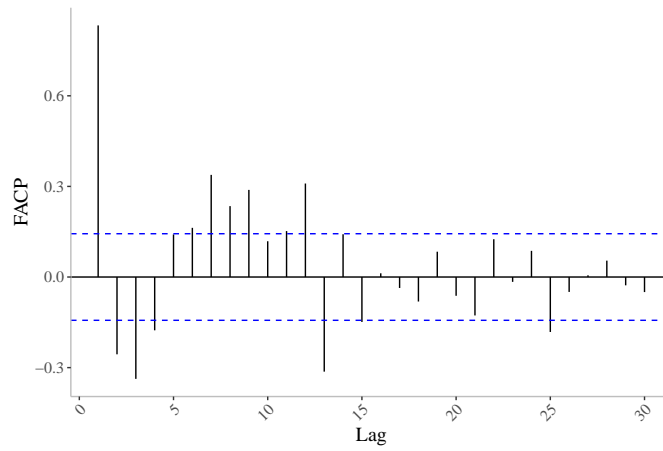


Figura 19: FACP da série IPI.

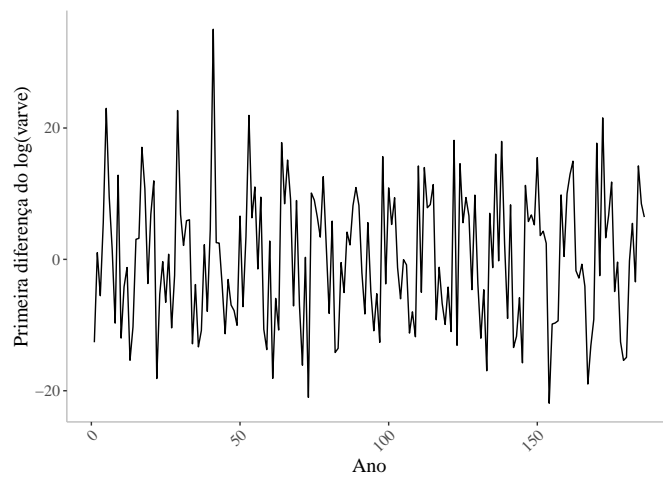


Figura 20: Gráfico da série diferenciada IPI.

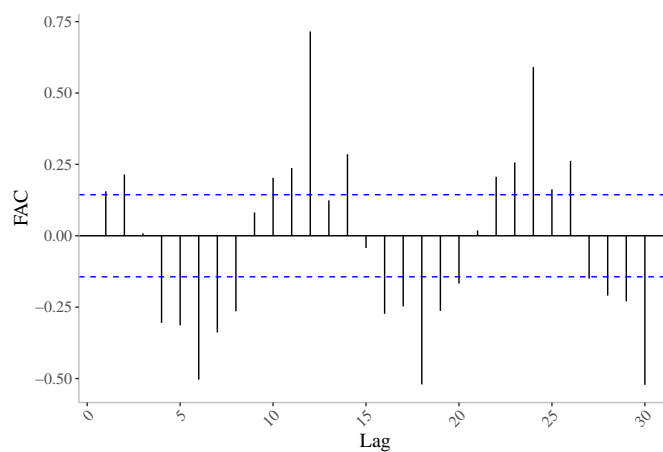


Figura 21: FAC da série diferenciada IPI.

Através do diagnóstico na Figura 23 temos que os resíduos parecem ser não correlacionado através da FAC (FAC amostrais dentro dos limites de Bartlett ou muito próximos), porém o teste de Ljung-Box (valores-p

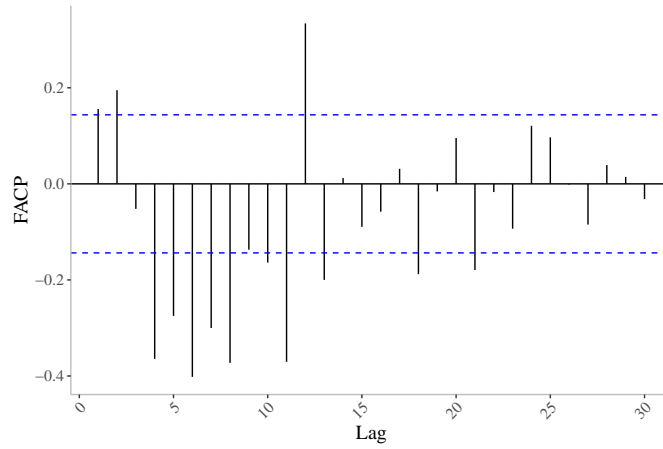


Figura 22: FACP da série diferenciada IPI.

< 0.05) rejeitam a hipótese de ruído branco do modelo para diferentes lag, além disso a suposição de normalidade parece estar satisfeita pelo gráfico QQ normal (todos os pontos dentro das bandas de confiança). Do ponto de vista do ajuste temos que buscar outros modelos que satisfaçam a suposição de ruído branco no ajuste, podemos utilizar por exemplo outra distribuição para os erros.

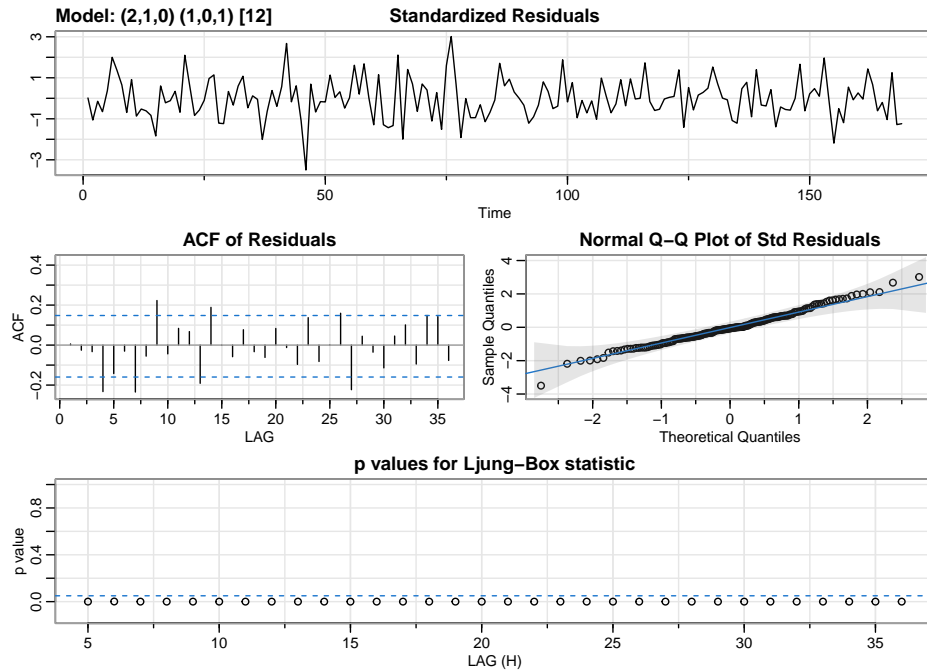


Figura 23: Diagnóstico do modelo SARIMA(2,1,0)(1,0,1)₁₂.

Do ponto de vista preditivo, analisando as Figuras 24 e 25, o modelo se ajustou bem, pois a ST observada foi adequadamente predita pelo modelo e a previsão para uma janela futura, aparentemente, acompanha a trajetória da ST como um todo, inclusive captando a sazonalidade. Logo, temos que

o modelo prevê bem para a série em questão.

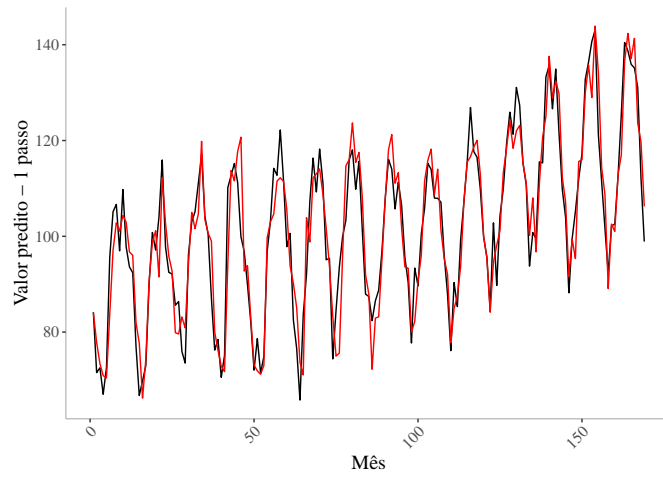


Figura 24: Previsão a 1 passo a frente do modelo $\text{SARIMA}(2,1,0)(1,0,1)_{12}$.

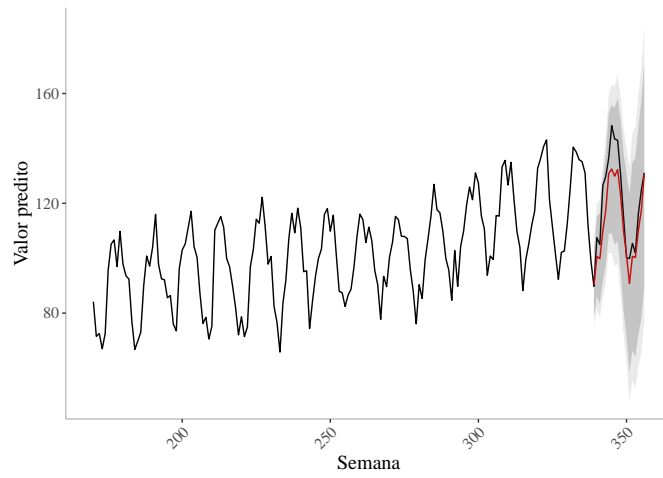


Figura 25: Previsão a 10 passos a frente do modelo $\text{SARIMA}(2,1,0)(1,0,1)_{12}$.