1. Questão 1

a) Temos que: $\mathcal{E}(Y_t) = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j 0 = \mu$. Além disso, pelas propriedades da distribuição $N(\mu, \sigma^2)$, temos que $Y_t | Y_{t-1} = y_{t-1} \sim N(\mu + \phi(y_{t-1} - \mu), \sigma^2)$.

b) Defina $Z_t = Y_t - \mu$. Pela informação dada, temos que $Cov(Z_t, Z_{t-k}) = \gamma_Z(k) = \sigma^2 \frac{\phi^k}{1-\phi^2}$. Entretanto, também temos que:

$$\gamma_Y(k) = Cov(Y_t, Y_{t-k}) = Cov(Z_t + \mu, Z_{t-k} + \mu) = Cov(Z_t, Z_{t-k}) = \sigma^2 \frac{\phi^k}{1-\phi^2}$$

Em particular, $\mathcal{V}(Y_t) = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}$. Assim, como $\mathcal{E}(Y_t)$ (item a)) e $\mathcal{V}(Y_t)$ não dependem do tempo e $\gamma_Y(k)$ só depende da distância entre os instantes, e não dos instantes em si, temos que o $\{Y_t\}$ é estacionário.

c) Pelo Cálculo de Probabilidade, do item a) e das características do processo, temos que:

$$\begin{aligned}
L(\boldsymbol{\theta}) &= f_{Y_1}(y_1) \prod_{i=2}^{n} f_{Y_t|Y_{t-1}}(y_i | y_{i-1}) \\
&= \frac{\sqrt{1-\phi^2}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{ -\frac{1-\phi^2}{2\sigma^2} (y_1 - \mu)^2 \right\} \\
&\times \left\{ \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2} \right)^{(n-1)/2} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=1}^{n-1} (y_t - \mu - \phi(y_{t-1} - \mu))^2 \right\} \right\}
\end{aligned}$$

Pois, pelo formulário, temos que $Y_1 \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}\right)$.

d) Temos que o EMM de μ é dado por:

$$\widehat{\mathcal{E}(Y_t)} = \widehat{\mu} = \overline{Y}$$

Por outro lado, temos que:

$$\mathcal{E}(\widehat{\mu}) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} \mathcal{E}(Y_t) = \mu$$

e (por indução)

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}(\widehat{\mu}) &= \frac{1}{n^2}\left(\sum_{t=1}^{n}\mathcal{V}(Y_t) + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} Cov(Y_i, Y_j)\right) \\
&= \frac{1}{n^2}\left(\sum_{t=1}^{n}\mathcal{V}(Y_t) + \frac{2\sigma^2}{1-\phi^2}\sum_{j=1}^{n-1}(n-j)\phi^j\right) \\
&= \frac{1}{n^2}\left(\frac{n\sigma^2}{1-\phi^2} + \frac{2\sigma^2}{1-\phi^2}\sum_{j=1}^{n-1}(n-j)\phi^j\right) \\
&= \frac{\sigma^2}{n(1-\phi^2)}\left(1 + 2\sum_{j=1}^{n-1}\left(1-\frac{j}{n}\right)\phi^j\right)
\end{aligned}$$

2. Questão 2

   a) Parece ser estacionária: pela ausência de tendência (Fig. 1); pelo decaimento exponencial das auto-correlações (AC) (Fig. 2) e pela existência de somente uma AC parcial significativa (Fig.3)

   b) AR(1) (estacionário e causal)

   $$Y_t = \mu + \phi\left(Y_{t-1} - \mu\right) + \epsilon_t, \epsilon_t \sim RB(0, \sigma^2) \tag{1}$$

   Pelo item a) Questão 1, $\mathcal{E}(Y_t) = \mu$, $\mathcal{V}(Y_t) = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}$, σ^2 é uma parâmetro de dispersão e $\rho(h) = \phi^k$, portanto ϕ influencia o sinal e a magnitude das correlações.

   c) No caso do modelo AR(1), sabemos que se $|z| \neq 1$, o qual é raiz de $\phi(z) = 1 - \phi z$, então o modelo é estacionário. Isso implica que $|\phi| \neq 1$. Como, $\widetilde{\phi} = 0,77$, então o modelo ajustado indica estacionaridade (pode-se endossar o argumento pelo IC). Para o modelo AR(2), temos que as raízes de $\phi(z) = 1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2$, tem de estar fora do círculo unitário. Com efeito, temos que:

   $$\Delta = \phi_1^2 + 4\phi_2 = 0,66$$

   e

   $$z = \frac{\phi_1 \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{0,76 \pm \sqrt{0,66}}{2} = \frac{0,76 \pm 0,81}{2}; z_1 = -39,25, z_2 = 1,25$$

   Assim, como $|z_i| \neq 1$, i =1,2, também nesse caso o modelo ajustado indica estacionaridade.

   d) Todas os critérios de informação indicam o modelo AR(1) como melhor (menores valores). Além disso, ϕ_2 no modelo AR(2) mostra-se não significativo (p = 0,8337). Assim, dado que ambos os modelos se ajustaram bem aos dados, o modelo AR(1) é preferível.

3. Questão 3

   a) Pelas Figuras 4, 5 e 6 temos indícios de que a ST é eetacionária. O comportamento da FAC (decaimento exponencial) e da FACP (somente duas auto-correlações parciais significativas) indica que que um modelo AR(2) pode ser apropriado. Sim, o modelo sugerido parece razoável.

b) O modelo não parece estar bem ajustado. Os resíduos não parecem ter comportamento de RB e, além disso, apresentam caudas pesadas. Aparentemente, há uma autocorrelação não captada pelo modelo.

c) Do ponto de vista preditivo, o modelo se ajustou bem, pois a ST observada foi adequadamente predita pelo modelo e a previsão para uma janela futura, aparentemente, acompanha a trajetória da ST.