

1. Questão 1

a) Temos que

$$L(\sigma^2) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2} \right)^{\frac{n-1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=2}^n (y_t - \mu - \phi(y_{t-1} - \mu))^2 \right\}$$

$$l(\sigma^2) = c - \frac{n-1}{2} \ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=2}^n (y_t - \mu - \phi(y_{t-1} - \mu))^2$$

$$S(\sigma^2) = -\frac{n-1}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2} \sum_{t=2}^n (y_t - \mu - \phi(y_{t-1} - \mu))^2$$

$$S(\tilde{\sigma}^2) = 0 \rightarrow \tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{t=2}^n (y_t - \mu - \phi(y_{t-1} - \mu))^2$$

$$\text{Assim, } \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{t=2}^n (Y_t - \mu - \phi(Y_{t-1} - \mu))^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{t=2}^n \epsilon_t^2$$

b) Temos que $W = \sum_{t=2}^n \left(\frac{\epsilon_t}{\sigma} \right)^2 \sim \chi_{n-1}^2$. Por outro lado, temos que:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sigma^2}{n-1} W$$

Logo, $\hat{\sigma}^2 \sim \text{gama}((n-1)/2, 2\sigma^2/(n-1))$. Portanto, $\mathcal{E}(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2$,
 $\mathcal{V}(\hat{\sigma}^2) = 2(n-1) \frac{(\sigma^2)^2}{(n-1)^2} = \frac{2\sigma^2}{n-1}$

2. Questão 2

a) Temos que:

$$\mathcal{E}(Y_t) = 0$$

b) Temos que:

$$\begin{aligned} Cov(Y_t, Y_{t-\tau}) &= Cov(\theta_2\epsilon_{t-2} + \theta_1\epsilon_{t-1} + \epsilon_t, \theta_2\epsilon_{t-\tau-2} + \theta_1\epsilon_{t-\tau-1} + \epsilon_{t-\tau}) \\ &= \begin{cases} (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)\sigma^2, & \text{se } \tau = 0 \\ (\theta_1\theta_2 + \theta_1)\sigma^2, & \text{se } |\tau| = 1 \\ \theta_2\sigma^2, & \text{se } |\tau| = 2 \\ 0, & \text{se } |\tau| \geq 3 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Corr(Y_t, Y_{t-\tau}) &= \frac{\gamma(\tau)}{\gamma(0)} \\ &= \begin{cases} 1, & \text{se } \tau = 0 \\ \frac{\theta_1\theta_2 + \theta_1}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}, & \text{se } |\tau| = 1 \\ \frac{\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}, & \text{se } |\tau| = 2 \\ 0, & \text{se } |\tau| \geq 3 \end{cases} \end{aligned}$$

3. Questão 3

- a) ARMA(2,1). A ST é estacionária, FAC e FACP decrescem exponencialmente, sendo mais rapidamente a taxa de decrescimento da FAC do que a da FACP.
- b) ARMA(2,1), pela Tabela (ϕ_1, ϕ_2, θ) .
- c) Bem ajustado. Parece ser ruído branco, ACF's são nulas, normalidade dos resíduos e variância constante. Sim, pois os modelos usados para simular e ajustar foram os mesmos.
- d) A predição para os dados observados foi boa, mas para os dados futuros, não. Não, pois os modelos usados para simular e ajustar foram os mesmos.