

Teoria de Resposta ao Item

Introdução e alguns modelos

Caio L. N. Azevedo, IMECC/Unicamp

- ▶ Teoria psicométrica desenvolvida para suprir necessidades na área educacional. É composta por conjunto de modelos que consideram variáveis latentes.
- ▶ Modelos de Resposta ao Item (MRI) : representam o relacionamento entre traços latentes de indivíduos e itens de um instrumento de medida (prova, questionário). Tal modelagem consiste na probabilidade de obter um certo escore em cada item.
- ▶ Existe um grande número de classes de MRI : dicotômicos e policotômicos, um e múltiplos grupos, multidimensionais, longitudinais multiníveis, dentre outros. MRI apresentam elevado número de parâmetros.
- ▶ Aplicada em diversas áreas: educação, marketing, psiquiatria, genética etc.
- ▶ Surgiu, formalmente, a partir dos trabalhos de Lord (1952) e Rasch (1960).

- ▶ No Brasil vem sendo usada extensamente em avaliação educacional SAEB, ENADE, ENEM, ...
- ▶ No mundo: TOEFL, GRE, PISA, ...
- ▶ Será parte fundamental dos exames vestibulares das universidades federais
- ▶ Decreto do MEC fala explicitamente em uso do “modelo logístico de 3 parâmetros”

- ▶ Como em qualquer área da Estatística, modelo decompõe as observações em sinal (explicável) e ruído (não explicável)

$$Y = \mu + \text{erro},$$

em que

$$\mathcal{E}(Y) = \mu.$$

- ▶ Vamos nos concentrar inicialmente em μ
- ▶ Depois cuidaremos do erro (mais fácil)

- ▶ Relembrando, $Y = \mu + \text{erro}$ e $\mathcal{E}(Y) = \mu$.
- ▶ Hipótese 0: $\mu = \theta \rightarrow$ proficiência do aluno.
- ▶ Nesse caso, estimamos θ de cada aluno pela média (ou soma) das respostas .
- ▶ Isso equivale a atribuir a cada aluno seu escore bruto
- ▶ É o que fazemos corriqueiramente
- ▶ Isso é o melhor que pode ser feito?

- ▶ Não!!!!
- ▶ Indivíduos podem ser submetidos a itens com diferentes níveis de dificuldades (diferentes provas).
- ▶ Como comparar tais resultados?.
- ▶ Como interpretar os escores?.
- ▶ Como caracterizar adequadamente os itens?.
- ▶ As estimativas do conhecimentos dos indivíduos dependem do particular conjunto de itens (prova).
- ▶ As estimativas dos parâmetros dos itens dependem do particular conjunto de indivíduos que respondem à prova.

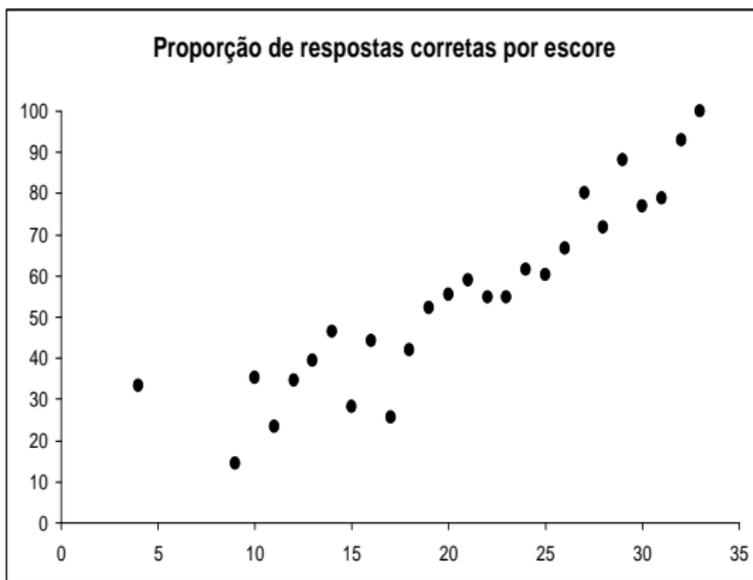
Formalização da TRI

- ▶ 1ª hipótese (Rasch,1960): $\mu_i = \theta - b_i$.
 - ▶ b_i é a dificuldade do item i .
 - ▶ Modelo de Rasch ou de 1 parâmetro.
- ▶ 2ª hipótese: $\mu_i = a_i(\theta - b_i)$.
 - ▶ a_i é a discriminação do item i .
 - ▶ Modelo de 2 parâmetros.

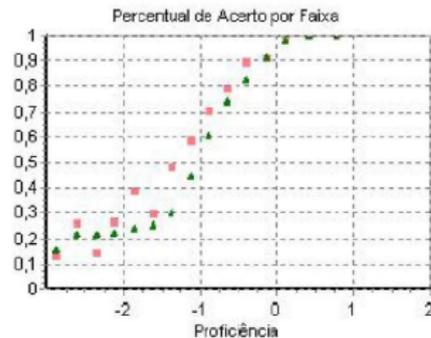
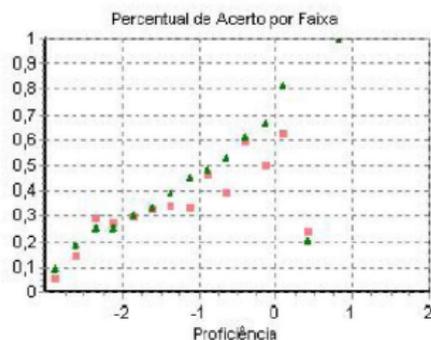
- ▶ Vamos agora tratar do “erro”
- ▶ Vários tipos de resposta possíveis:
 - ▶ Dicotômica (certo = 1 ou errado = 0).
 - ▶ Politômica: nominal ou ordinal.
 - ▶ Contínua.
 - ▶ Contagem.
- ▶ Vamos nos concentrar em resposta dicotômica (múltipla escolha)

- ▶ Existem 2 valores possíveis para Y : 0 e 1
- ▶ Logo, usaremos a distribuição de Bernoulli onde $P(Y = 1) = p$.
- ▶ Como $\mathcal{E}(Y) = p$, tenderíamos a fazer: $p = \mu_i = a_i(\theta - b_i)$.

► Evidência empírica



► Evidência empírica



- ▶ Problema: $0 \leq p \leq 1$ e $-\infty \leq \mu \leq \infty$.
- ▶ Precisamos transformar μ para $[0, 1]$
- ▶ Qualquer f.d.a de v.a. na reta serve a tal propósito.
- ▶ Principais transformações usadas: f
 - ▶ $\Phi(X)$ - f.d. da Normal .
 - ▶ $F(x) = \frac{1}{1 + e^{(-x)}}$ - f.d. logística.
- ▶ Vamos nos concentrar na logística mas as ambas são muito parecidas.

- ▶ Assim, chega-se ao modelo logístico com 2 parâmetros (L2P) dado pelas equações:

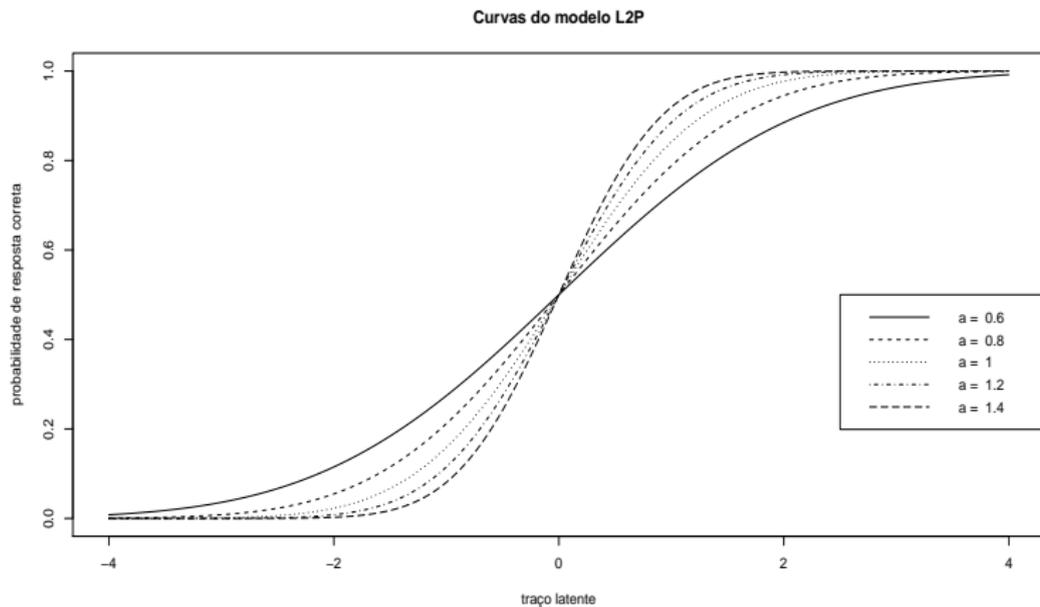
$$P(Y_{ij} = 1|\theta_j, \zeta_i) = p_{ij} = \frac{1}{1 + e^{-a_i(\theta_j - b_i)}}$$

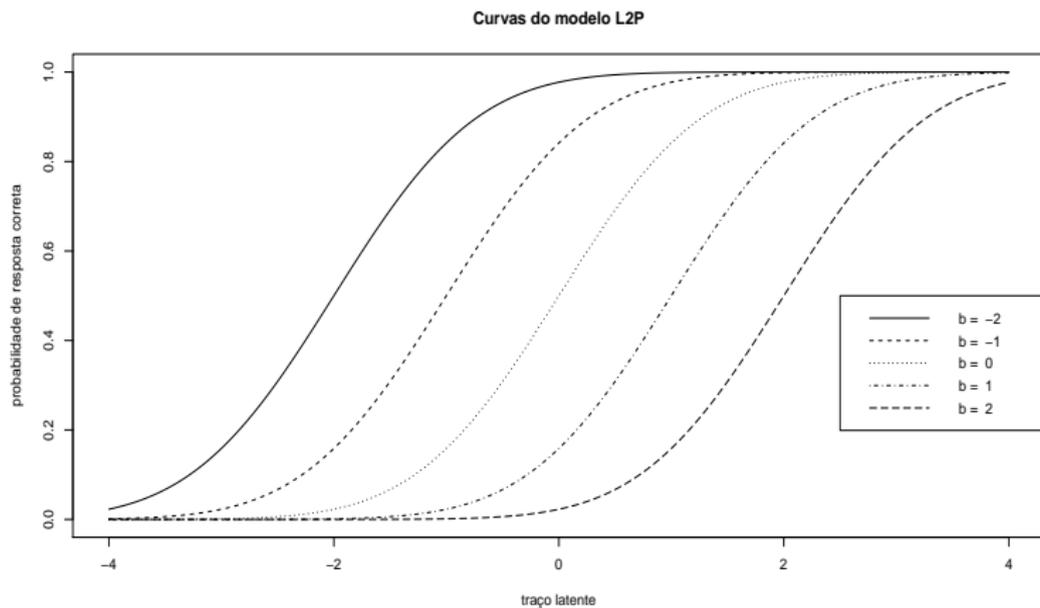
ou, analogamente,

$$\log \left[\frac{p_{ij}}{1 - p_{ij}} \right] = -a_i(\theta_j - b_i)$$

em que

- ▶ Y_{ij} é a resposta do indivíduo j ao item i .
- ▶ $\zeta_i = (a_i, b_i)$.
- ▶ θ_j : traço latente do indivíduo j .





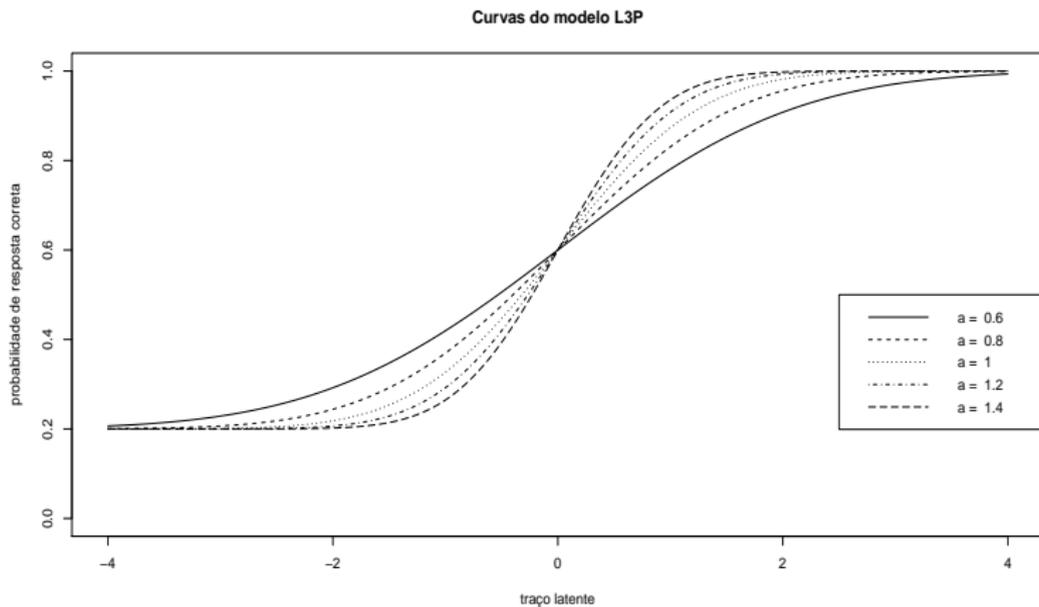
- ▶ Questões de múltipla escolha sempre permitem que acerte a questão mesmo aluno que não domine o conhecimento necessário $\theta \rightarrow \infty$.
- ▶ Modelar a probabilidade (aproximada) de resposta correta de alunos que respondem ao acaso e/ou tenham baixo nível de conhecimento .
- ▶ Incluir tal probabilidade no modelo de 2 parâmetros.

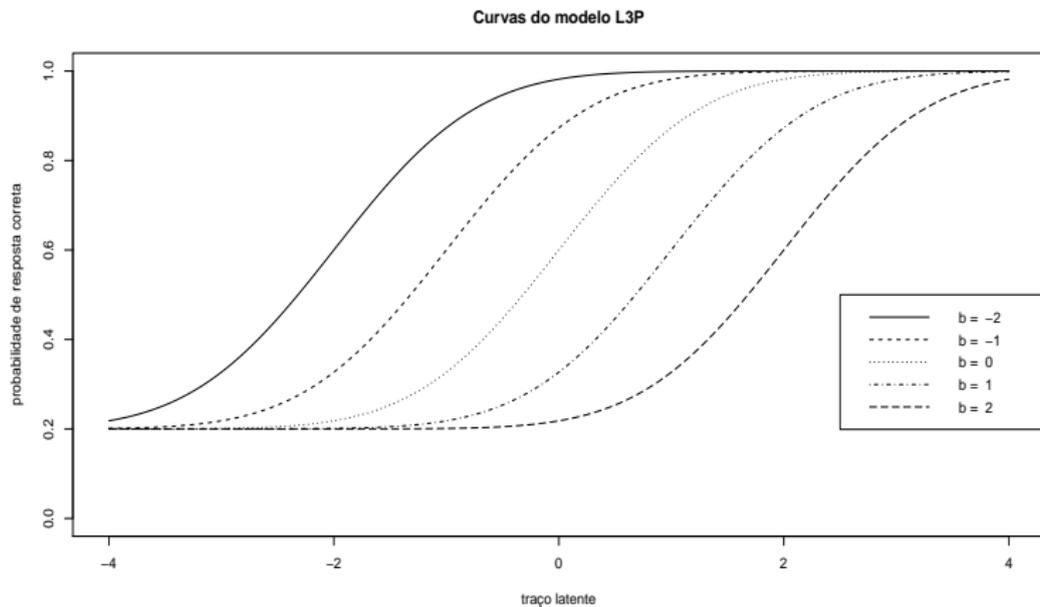
- ▶ **Modelo de resposta ao item** : Seja Y_{ij} a resposta do indivíduo j ao item i .

$$Y_{ij} | (\theta_j, \zeta_i) \sim \text{Bernoulli}(p_{ij}),$$

$$p_{ij} = P(Y_{ij} = 1 | \theta_j, \zeta_i) = c_i + (1 - c_i) \frac{1}{1 + e^{-a_i(\theta_j - b_i)}}$$

- ▶ θ_j : traço latente do indivíduo j .
- ▶ $\zeta_i = (a_i, b_i, c_i)'$.
- ▶ a_i : parâmetro de discriminação (escala) do item i .
- ▶ b_i : parâmetro de dificuldade (posição) do item i .
- ▶ c_i : probabilidade aproximada (assintótica) de indivíduos com traço latente baixo do item i .





- ▶ De uma forma geral, os modelos de resposta ao item podem ser caracterizados por:.
 - ▶ $\mathbf{Y} \sim \text{Bernoulli}(\mathbf{P})$,
 - ▶ $\mathbf{P} = \mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta}_{\mathbf{F}})$, \mathbf{F} são funções de distribuição acumuladas.
 - ▶ $\boldsymbol{\theta}$: traços latentes.
 - ▶ $\boldsymbol{\zeta}$: parâmetros dos itens.
 - ▶ $\boldsymbol{\eta}_{\mathbf{F}}$: parâmetros que caracterizam a f.d.a (\mathbf{F}).

- ▶ Andrade, D.F., Tavares, H.R., Cunha, R.V. (2000). Teoria da Resposta ao Item: Conceitos e Aplicações. São Paulo: Associação Brasileira de Estatística.
- ▶ Lord, F.M., Novick, M.R. (1968). Statistical Theories of Mental Test Score. Reading: Addison-Wesley
- ▶ Lord, F.M. (1980). Applications of Item Response Theory to Practical Testing Problems. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates
- ▶ Hambleton, R.K., Swaminathan, H., Rogers, H.J. (1991). Fundamentals of Item Response Theory. Newbury Park: Sage Publications.