

Modelos SARIMA (Auto-Regressivo Integrado de Médias Móveis com Sazonalidade): parte 2

Prof. Caio Azevedo

Previsão

- Seja Y_1, \dots, Y_t uma amostra do processo $SARIMA(p, d, q)(P, D, Q)_s$, ou seja:

$$\begin{aligned}\Phi(B^s)\phi(B)(1 - B^s)^D(1 - B)^d Y_t &= \delta + \Theta(B^s)\theta(B)\epsilon_t, \\ \epsilon_t &\sim RB(0, \sigma^2)\end{aligned}$$

- Uma forma de calcular previsões, é utilizarmos resultados desenvolvidos para os **modelos ARMA** da seguinte forma (próximo slide, e nos seguintes, apresentaremos alguns exemplos):

Previsão

- 1 Defina: $X_t = (1 - B)^d (1 - B^s)^D Y_t$, então $\{X_t\}$ é um processo ARMA($p+Ps, q+Qs$) com restrições ([aqui](#)), ou seja:

$$\Phi(B^s)\phi(B)X_t = \delta + \Theta(B^s)\theta(B)\epsilon_t, \quad (1)$$

de modo que já sabemos como calcular as previsões $X_n(k)$ ([aqui](#)).

Note que a amostra disponível para tal tarefa é x_{d+Ds+1}, \dots, x_n .

- 2 A partir de (1) encontramos uma expressão para $Y_n(k)$ que depende de $\{Y_n, Y_{n-1}, \dots\}$ e de $X_n(t), t \leq k$

Exemplos (previsão)

- ARIMA(1,1,0) causal: $(1 - \phi B)(1 - B)Y_t = \epsilon_t$. Previsão:

1 Seja $X_t = (1 - B)Y_t$, então $X_t \sim AR(1)$ e, portanto $X_n(k) = \phi^k X_n$.

2 Como $X_t = Y_t - Y_{t-1}$, então, aplicando operador $\mathcal{E}[\cdot | \mathcal{F}_n]$ em X_{n+k} , obtemos $X_n(k) = Y_n(k) - Y_n(k-1)$. Logo, $Y_n(k) = X_n(k) + Y_n(k-1)$.

Portanto,

$$Y_n(1) = \phi X_n + Y_n$$

$$Y_n(2) = \phi(1 + \phi)X_n + Y_n$$

⋮ por indução

$$Y_n(k) = \frac{\phi(1 - \phi^k)}{1 - \phi} (Y_n - Y_{n-1}) + Y_n$$

- Assim, se $k \rightarrow \infty$, então $Y_n(k) \rightarrow \left(\frac{1}{1 - \phi}\right) Y_n + \left(-\frac{\phi}{1 - \phi}\right) Y_{n-1}$

Exemplos (previsão)

- Modelo Airline: SARIMA(0, 1, 1)(0, 1, 1)₁₂:

$$(1 - B)(1 - B^{12})Y_t = (1 + \theta B)(1 + \Theta B^5)\epsilon_t$$

- Previsão:

1 Seja $X_t = (1 - B)(1 - B^{12})Y_t$, então

$$X_t = (1 + \theta B)(1 + \Theta B^5)\epsilon_t$$

$$X_t = \epsilon_t + \theta\epsilon_{t-1} + \Theta\epsilon_{t-12} + \theta\Theta\epsilon_{t-13} \quad (2)$$

Vamos encontrar previsões para $\{X_t\}$. Uma vez que:

$$\begin{aligned} X_n(k) &= \mathcal{E}(\epsilon_{n+k}|\mathcal{F}_n) + \theta\mathcal{E}(\epsilon_{n+k-1}|\mathcal{F}_n) + \Theta\mathcal{E}(\epsilon_{n+k-12}|\mathcal{F}_n) \\ &+ \theta\Theta\mathcal{E}(\epsilon_{n+k-13}|\mathcal{F}_n) \end{aligned}$$

Cont.

- 1 (Cont.) Precisamos estimar $\mathcal{E}(\epsilon_t|\mathcal{F}_n)$ quando $t \leq n$. Seja ϵ_t^n o estimador de $\mathcal{E}(\epsilon_t|\mathcal{F}_n)$, então:

$$X_n(1) = \theta\epsilon_n^n + \Theta\epsilon_{n-11}^n + \theta\Theta\epsilon_{n-12}^n$$

$$X_n(2) = \Theta\epsilon_{n-10}^n + \theta\Theta\epsilon_{n-11}^n$$

$$X_n(3) = \Theta\epsilon_{n-9}^n + \theta\Theta\epsilon_{n-10}^n$$

\vdots

$$X_n(12) = \Theta\epsilon_n^n + \theta\Theta\epsilon_{n-1}^n$$

$$X_n(13) = \theta\Theta\epsilon_n^n$$

$$X_n(k) = 0, k \geq 14$$

Cont.

- 1 (Cont.) Os valores $\epsilon_n^n, \epsilon_{n-1}^n, \dots, \epsilon_{n-12}^n$ são calculados recursivamente.

Assim, de (2), temos que:

$$\epsilon_t = X_t - \theta\epsilon_{t-1} - \Theta\epsilon_{t-12} - \theta\Theta\epsilon_{t-13},$$

então

$$\epsilon_t^n = X_t - \theta\epsilon_{t-1}^n - \Theta\epsilon_{t-12}^n - \theta\Theta\epsilon_{t-13}^n,$$

Note que amostra disponível em termos do processo $\{X_t\}$, é $X_{14}, X_{15}, \dots, X_n$.

Portanto, considerando que $\epsilon_j^n = 0, j \leq 13$, obtemos (próximo slide):

Cont.

1 (Cont.)

$$\epsilon_{14}^n = X_{14}$$

$$\epsilon_{15}^n = X_{15} - \epsilon_{14}^n$$

$$\vdots$$

$$\epsilon_{27}^n = X_{27} - \theta\epsilon_{26}^n - \Theta\epsilon_{15}^n - \theta\Theta\epsilon_{14}^n$$

$$\vdots$$

$$\epsilon_n^n = X_{27} - \theta\epsilon_{n-1}^n - \Theta\epsilon_{n-12}^n - \theta\Theta\epsilon_{n-13}^n$$

Cont.

- 2 Como $X_t = Y_t - Y_{t-1} - Y_{t-12} + Y_{t-13}$, então:

$$Y_n(k) = X_n(k) + Y_n(k-1) + Y_n(k-12) + Y_n(k-13)$$

- 3 Por exemplo,

$$Y_n(1) = X_n(1) + Y_n + Y_{n-11} - Y_{n-12}$$

$$Y_n(k) = Y_n(k-1) + Y_n(k-12) - Y_n(k-13), k \geq 14$$

Previsão

- Modelo ARIMA(0,1,1) e EWMA (“Exponentially Weighted Moving Average”). Seja o modelo:

$$Y_t = Y_{t-1} - \lambda\epsilon_{t-1} + \epsilon_t$$

em que $|\lambda| < 1$, $Y_0 = 0$, $\epsilon_t \sim RB(0, \sigma^2)$. Considere

$$Z_t = \epsilon_t - \lambda\epsilon_{t-1}$$

então $Y_t = Y_{t-1} + Z_t$. Logo,

$$Z_t = Y_t - Y_{t-1} \tag{3}$$

Previsão

- Como $\{Z_t\}$ corresponde a um processo MA(1), portanto é invertível e pode ser (re)escrito como

$$Z_t = - \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^j z_{t-j} + \epsilon_t \quad (4)$$

- Substituindo (3) em (4), temos que:

$$\begin{aligned} Y_t &= (1 - \lambda) \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{j-1} Y_{t-j} + \epsilon_t \\ &= \tilde{Y}_t + \epsilon_t; \\ \tilde{Y}_t &= (1 - \lambda) \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{j-1} Y_{t-j} \end{aligned} \quad (5)$$

Previsão

- Assim, (5) é uma EWMA (“Exponentially Weighted Moving Average”) e pode ser (re)escrito como :

$$\tilde{Y}_{t+1} = (1 - \lambda) Y_t + \lambda \tilde{Y}_t$$

- Assim, \tilde{Y}_{t+1} é atualizado de forma simples, através de uma média ponderada entre a última observação (Y_t) e o valor (predito) prévio (\tilde{Y}_t).
- O parâmetro (λ) é uma constante de suavização que pode ser determinada a priori (assumindo valores no intervalo $[0,1]$, para algumas aplicações) ou estimada através da minimização de $S(\lambda) = \sum_t (Y_t - \tilde{Y}_t)^2$.

Previsão

- O método EWMA é considerado um método de previsão **ad-hoc**. Aqui foi demonstrado que a respectiva fórmula surge a partir de um modelo ARIMA.
- Contudo, se utilizarmos a abordagem ARIMA temos maior exibilidade para a modelagem (estimação/previsão).
- De qualquer forma, um método bastante útil para prever a volatilidade em séries financeiras é baseado no EWMA.

Previsão

- Se o processo é não estacionário então a incerteza das previsões aumenta à medida que aumenta o horizonte de previsão.
- Podem ser calculados intervalos de previsão aproximados supondo normalidade do ruído branco (veja [aqui](#) e [aqui](#)).

Critérios para comparar modelos em termos de previsões

- Sejam $Y_n(1), \dots, Y_n(m)$ as previsões calculadas. Uma forma de avaliar a qualidade do modelo ajustado, em termos de previsão, é compará-las com os respectivos valores a serem observados, Y_{n+1}, \dots, Y_{n+m} .
- Para isso, defina $E_n(k) = Y_{n+k} - Y_n(k)$.
- Podemos considerar as seguintes estatísticas (próximo slide):

Critérios para comparar modelos em termos de previsões

- Erro percentual médio: $EPM = 100 \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \frac{E_n(k)}{Y_{n+k}}$.
- Erro quadrático médio: $EQM = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m E_n^2(k)$.
- Erro absoluto médio: $EAM = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \frac{|E_n(k)|}{|Y_{n+k}|}$.
- Erro percentual absoluto médio: $EPAM = 100 \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \frac{|E_n(k)|}{|Y_{n+k}|}$.

Modelagem

- Devemos, primeiramente, entender o problema, levantando aspectos teóricos, da literatura e informações dos responsáveis pelo problema.
- Devemos observar os gráficos de ST, FAC e FACP, tentando visualizar:
 - Se a ST parecer ser estacionária ou não estacionária (na média e/ou na variância).
 - Os padrões da FAC e da FACP.
 - Existência de sazonalidade/ciclos (esta(s), pode(m) ser, eventualmente, modelada(s) usando modelos ARIMA) e sua(s) ordem(ns).
 - Estrutura e ordem da dependência.
- Nos próximos slides, detalharemos as etapas acima.

Modelagem

- No estágio de identificação de modelos, primeiro observamos se a série apresenta tendência e/ou sazonalidade (tentando determinar o valor do período sazonal, s). Ferramentas para fazer isso incluem o gráfico da série e os gráficos da FAC e FACP.
- Na análise da parte sazonal, nas: FAC e FACP, se observarmos que o decaimento das autocorrelações nas defasagens múltiplos de s é muito devagar, então pode ser conveniente diferenciar a ST, sazonalmente.
- Na parte regular, se observarmos que as autocorrelações decaem (muito) vagorosamente, então pode ser conveniente diferenciar.

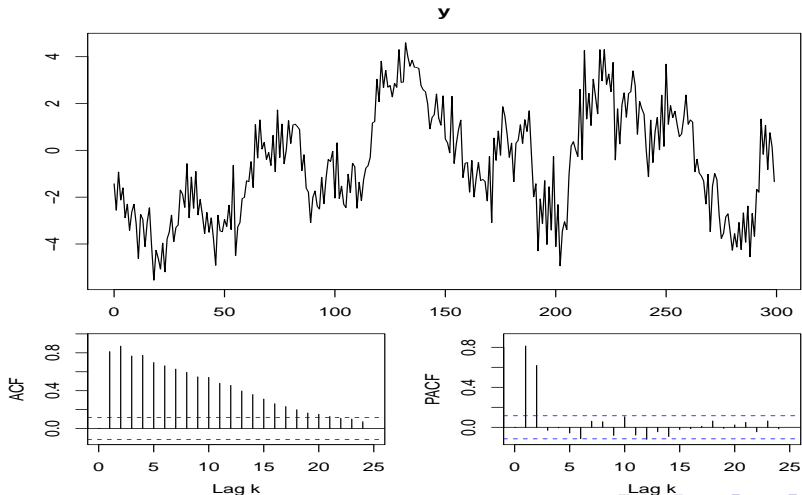
Modelagem

- Outra evidência (“no curso”) de que é necessário diferenciar a ST é quando ela apresentar tendência.
- Na prática são escolhidos valores de (d, D) iguais a 0, 1 ou 2. A série obtida após diferenciar a ST original, em relação as partes sazonal e regular, tem que apresentar comportamento estacionário.
- Devemos ter cuidado com a sobre-diferenciação.
- Com base na série original e nas FAC e FACP, conjecturamos um (ou mais) conjunto(s) de valores para p, P, q, Q . Claro que, uma vez que descritivamente é difícil determinar tais valores, alguns modelos podem ser ajustados e comparados.

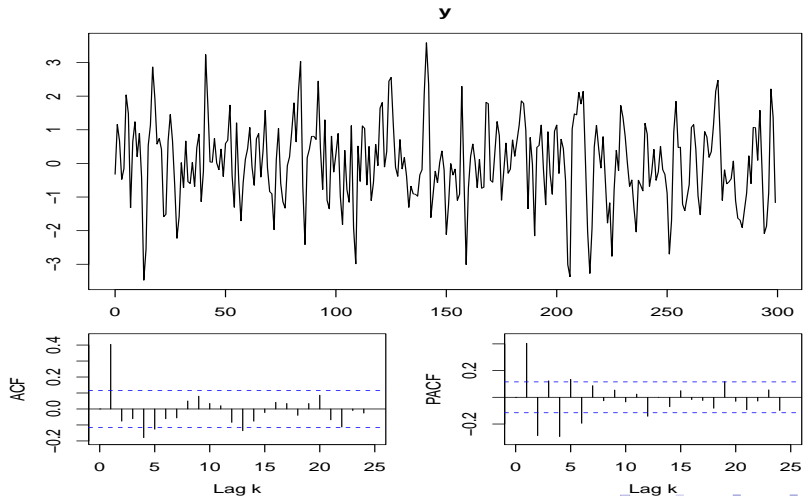
Modelagem

- A estimação dos modelos competidores é feita, usualmente, por máxima verosimilhança.
- Posteriormente, cada modelo deve ser submetido à uma análise residual apropriada. No curso, pelo menos a ACF dos resíduos deve mostrar que todas elas são não significativas.
- Com relação à comparação de modelos, podemos utilizar os critério de informação ([aqui](#)) e os de qualidade da previsão (slide 16 deste material).
- A seguir, apresentamos gráficos de algumas ST simuladas (sem a pretensão de ser exaustivo).

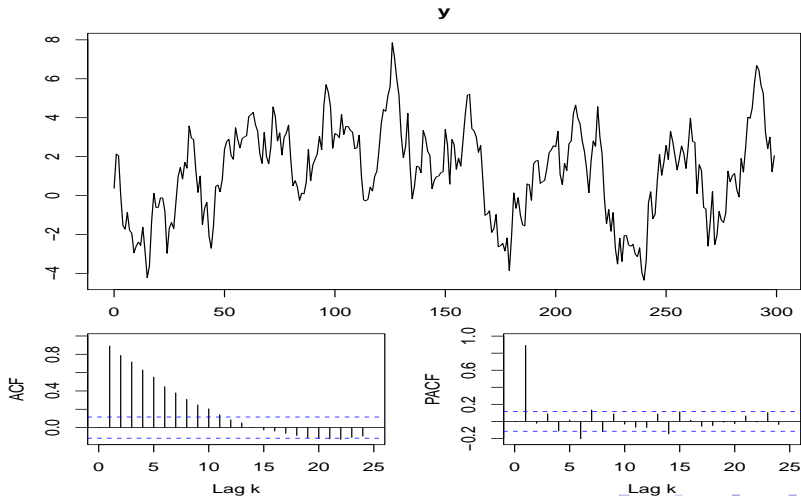
$$SARIMA(2, 0, 0)(0, 0, 0)_{s=1} = AR(2)$$



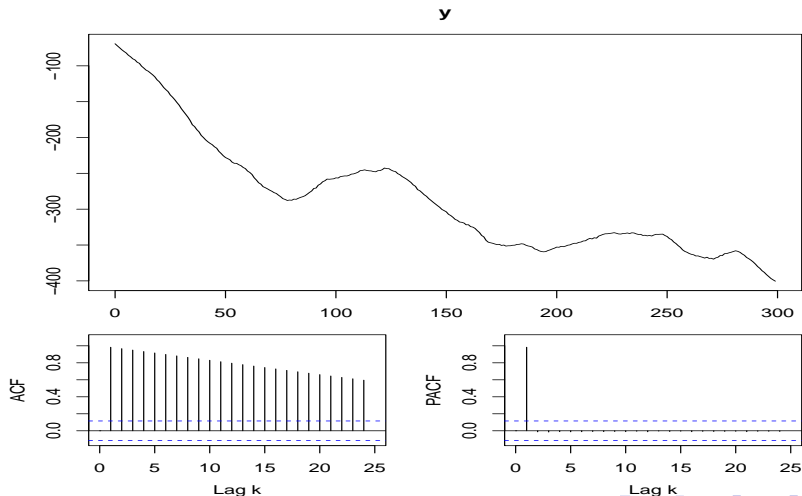
$$SARIMA(0, 0, 2)(0, 0, 0)_{s=1} = MA(2)$$



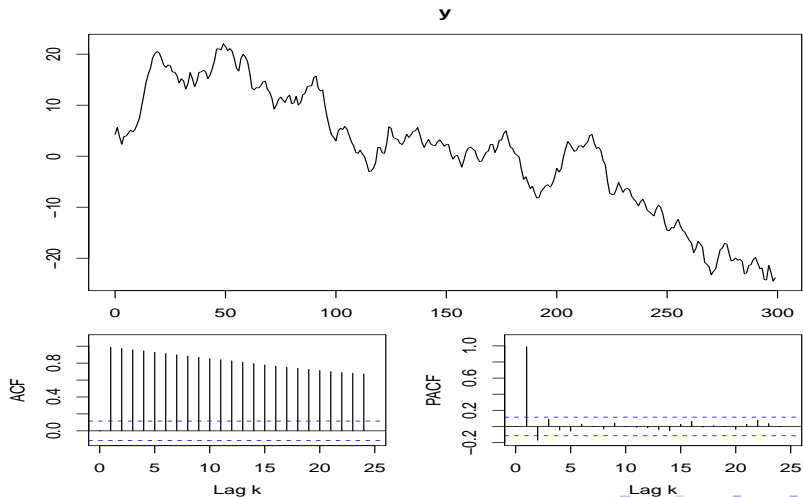
$$SARIMA(2, 0, 2)(0, 0, 0)_{s=1} = ARMA(2, 2)$$



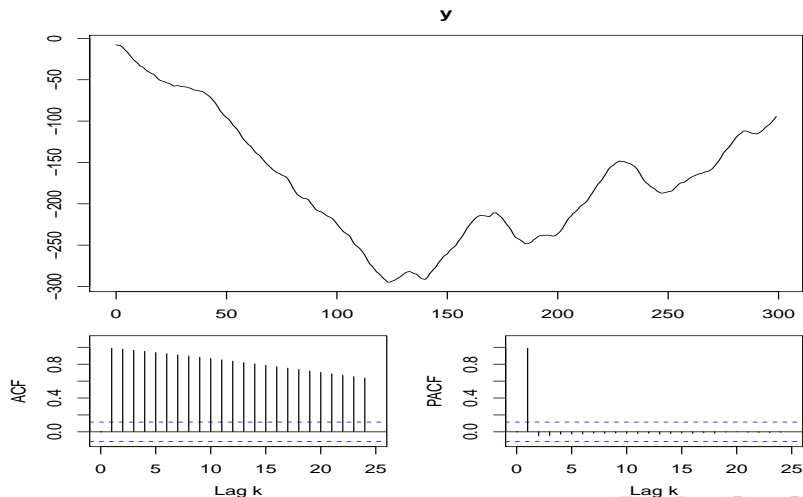
$$SARIMA(2, 1, 0)(0, 0, 0)_{s=1} = ARIMA(2, 1, 0)$$



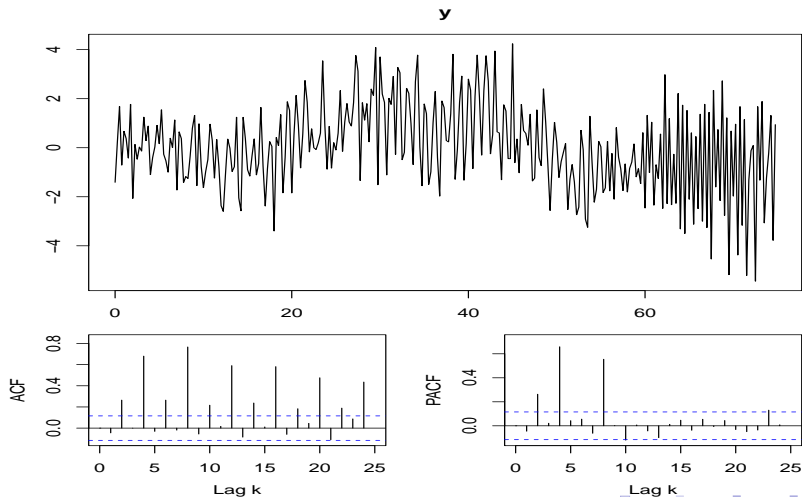
$$SARIMA(0, 1, 2)(0, 0, 0)_{s=1} = ARIMA(0, 1, 2)$$



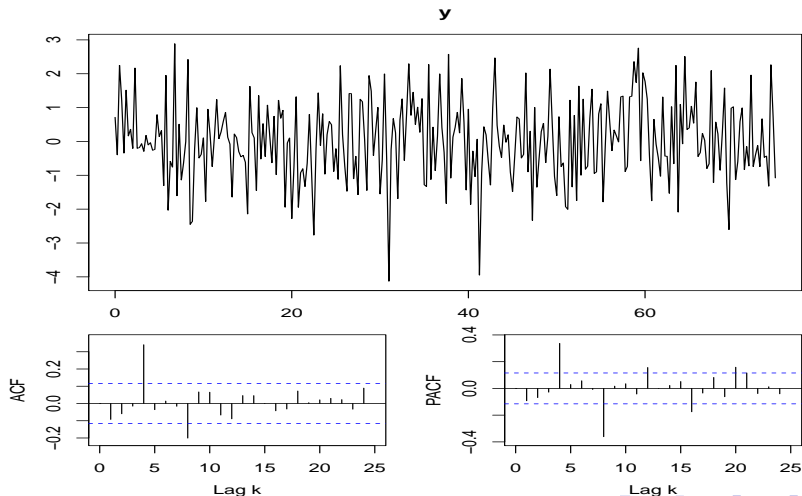
$$SARIMA(2, 1, 2)(0, 0, 0)_{s=1} = ARIMA(2, 1, 2)$$



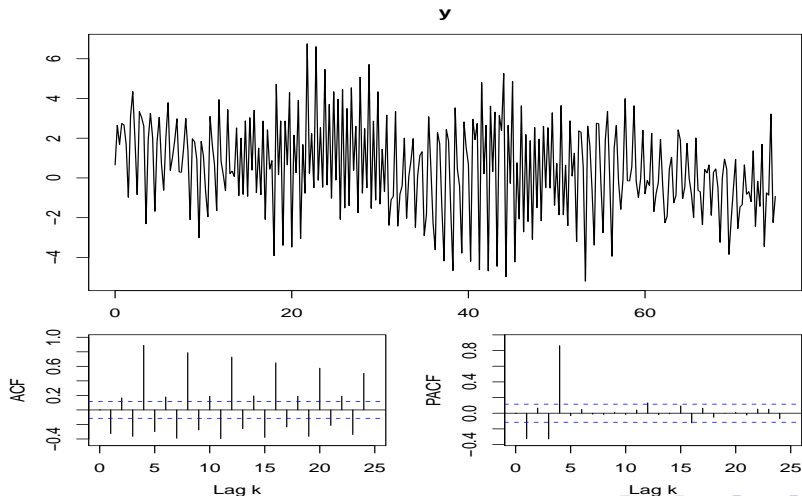
$$SARIMA(0, 0, 0)(2, 0, 0)_{s=4} = SARMA(2, 0)_{s=4}$$



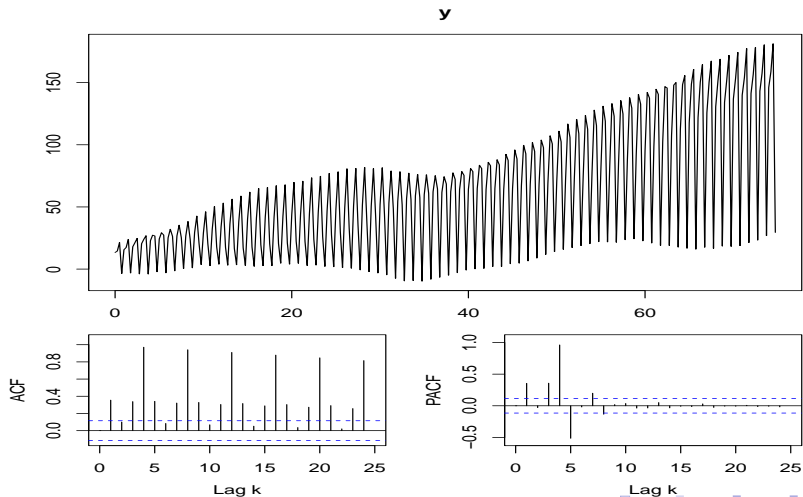
$$SARIMA(0, 0, 0)(0, 0, 2)_{s=4} = SARMA(0, 2)_{s=4}$$



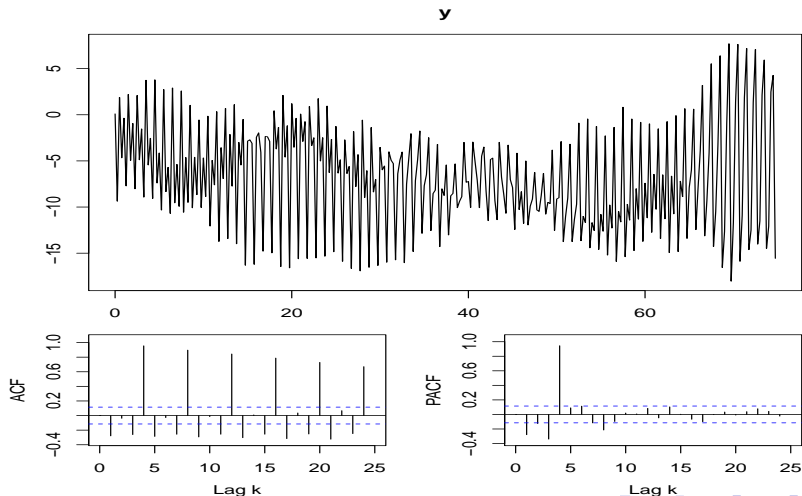
$$SARIMA(0, 0, 0)(2, 0, 2)_{s=4} = SARMA(2, 2)_{s=4}$$



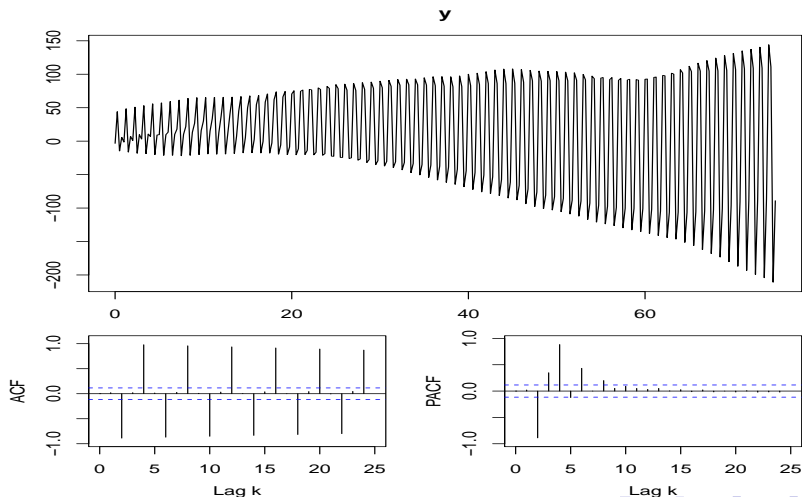
$$SARIMA(0, 0, 0)(2, 1, 0)_{s=4} = SARIMA(2, 1, 0)_{s=4}$$



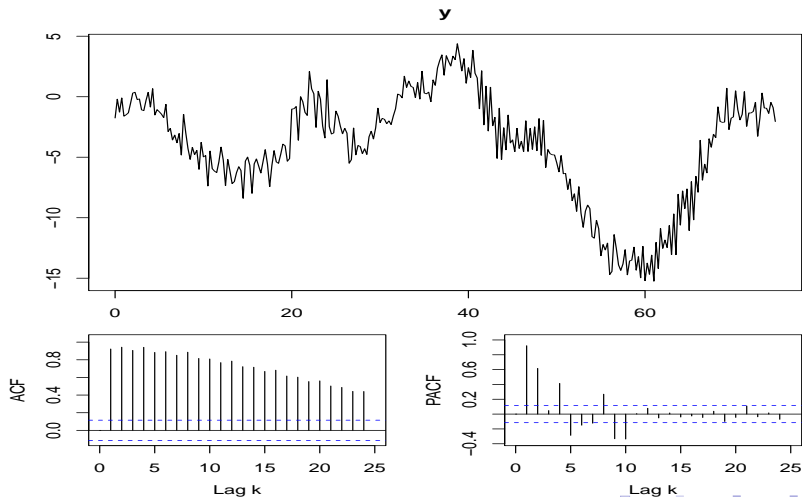
$$SARIMA(0, 0, 0)(0, 1, 2)_{s=4} = SARIMA(0, 1, 2)_{s=4}$$



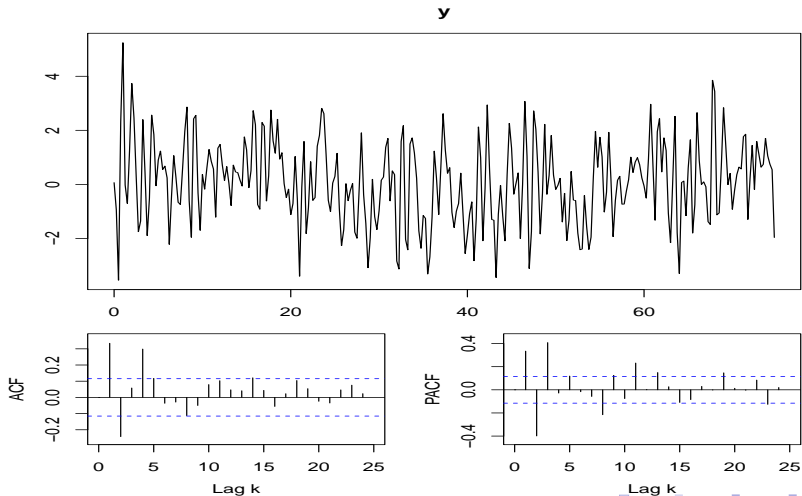
$$SARIMA(0, 0, 0)(2, 1, 2)_{s=4} = SARIMA(2, 1, 2)_{s=4}$$



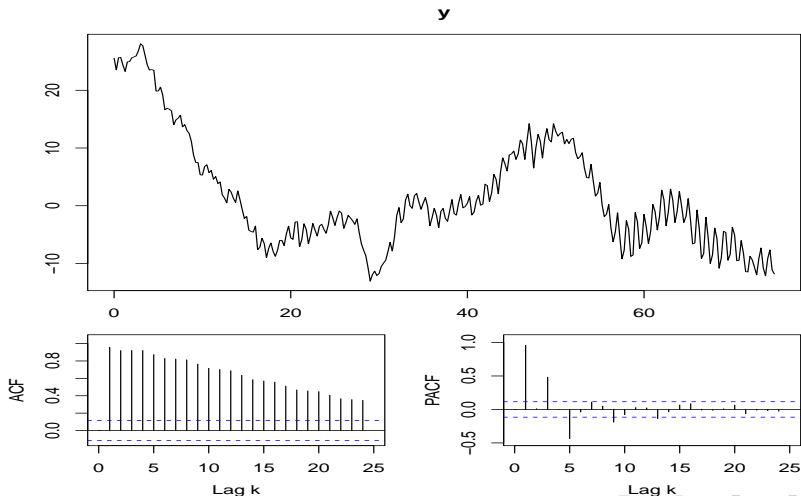
$$SARIMA(2, 0, 0)(2, 0, 0)_{s=4} = SARMA(2, 0, 0)(2, 0, 0)_{s=4}$$



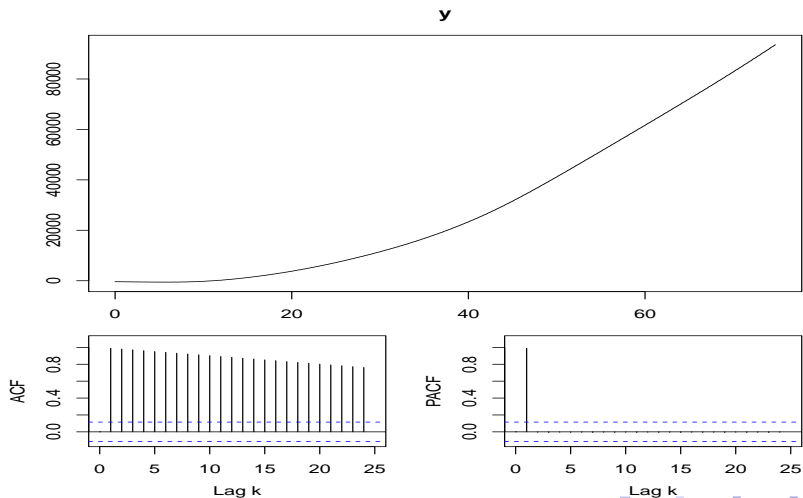
$$SARIMA(0, 0, 2)(0, 0, 2)_{s=4} = SARMA(0, 0, 2)(0, 0, 2)_{s=4}$$



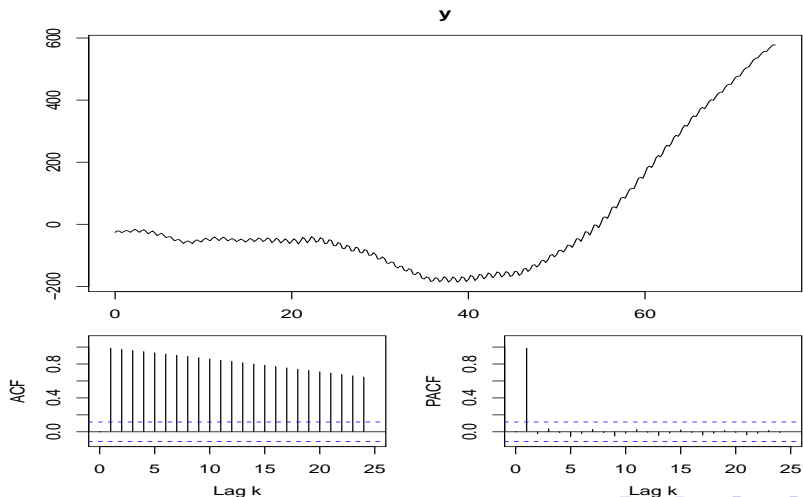
$$SARIMA(2, 0, 2)(2, 0, 2)_{s=4} = SARMA(2, 0, 2)(2, 0, 2)_{s=4}$$



$SARIMA(2, 1, 0)(2, 1, 0)_{s=4}$



$SARIMA(0, 1, 2)(0, 1, 2)_{s=4}$



$SARIMA(2, 1, 2)(2, 1, 2)_{s=4}$

