

# Modelos SARIMA (Auto-Regressivo Integrado de Médias Móveis com Sazonalidade): parte 1

Prof. Caio Azevedo

# Introdução

- Vamos retornar ao **processos ARIMA(p,d,q)**. Com efeito, seja  $Y_t = Y_{t-1} + \epsilon_t$ ,  $t = 1, 2, \dots$ , em que  $Y_0 \equiv c$ . Então, temos que:

$$Y_t = c + \epsilon_1 + \epsilon_2 + \dots + \epsilon_t$$

- Portanto  $E[Y_t] = c$  e  $\mathcal{V}[Y_t] = (t - 1)\sigma^2$ ,  $\forall t$ . Isto é, trata-se de um processo não estacionário na variância.
- Considere agora o processo:

$$Y_t = Y_{t-1} + (1 + \theta B)\epsilon_t = Y_{t-1} + \omega_t, \omega_t \sim MA(1) \quad (1)$$

# Introdução

- (Cont.) Do processo anterior, temos que  $\mathcal{E}(Y_t) = \mathcal{E}(Y_{t-1})$  e, assumindo que  $Y_0 \equiv c$ , temos que processo é estacionário em termos da média. Isto é, não há “tendência genuína”.
- No entanto, a perturbação  $(\omega_t)$ , em geral, não é um ruído branco. Então  $\{Y_t\}$  tende a apresentar valores, por longos períodos acima e por longos períodos abaixo da média.
- O fenômeno acima é conhecido como tendência estocástica.
- Note que o processo (1) pode ser reescrito como:

$$(1 - B)Y_t = (1 + \theta B)\epsilon_t$$

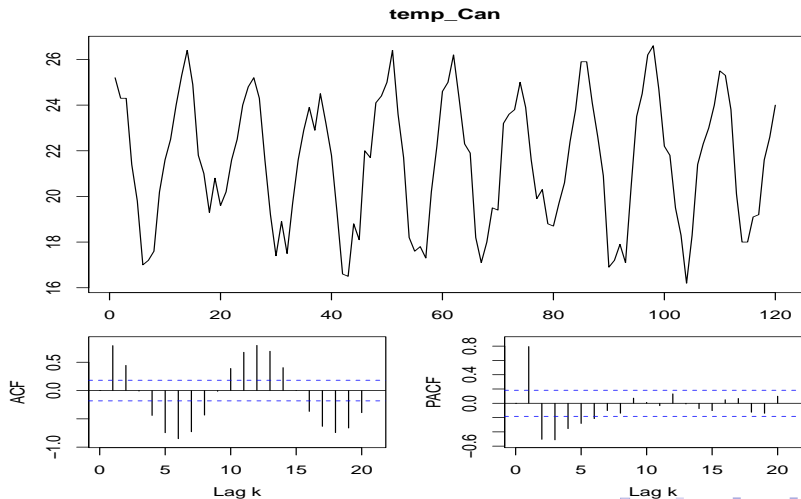
o qual é membro da família ARIMA(p,q,d).



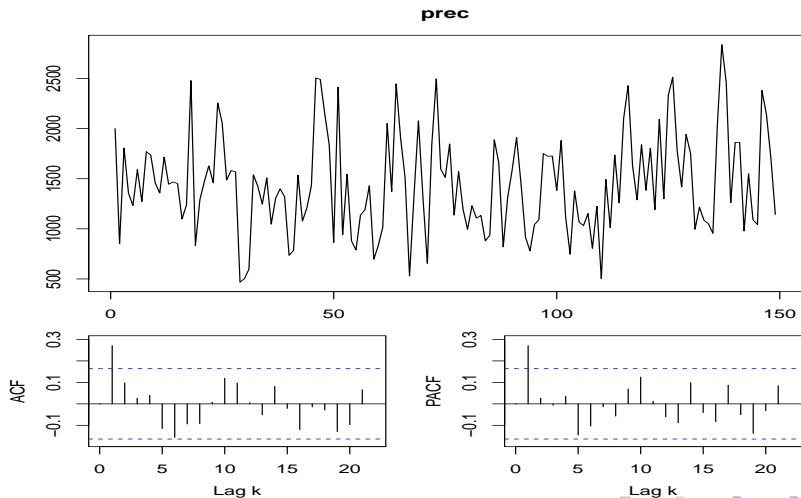
# Introdução

- Por outro lado, muitas séries exibem comportamentos sazonais. A seguir discutiremos como modificar o processo ARIMA (ARMA) para que capture sazonalidade estocástica.
- No exemplo das temperaturas médias mensais de Cananéia, notamos que há uma similaridade entre as temperaturas nos mesmos meses, ao longo dos diferentes anos.
- Ou seja, ao longo dos “Janeiros”, “Fevereiroiros” etc, ao longo dos anos. Isto é, observa-se um comportamento periódico em tempos múltiplos de  $s = 12$ .
- Então seria conveniente ter um modelo que explique a ST (também) nos tempos múltiplos de  $s$ .

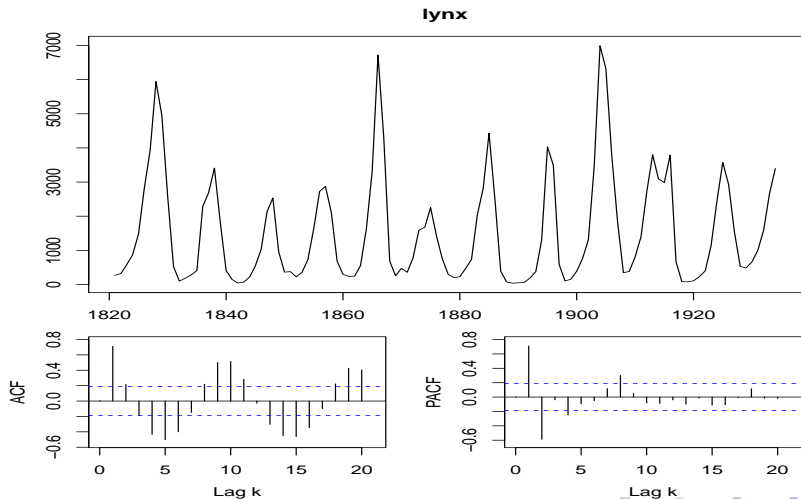
# Temperaturas médias mensais de Cananéia



# Precipitação pluviométrica de Fortaleza



# Número de lincos presos



# Modelos SARMA (puros)

- Os modelos Sazonais Autoregressivos de Média Móveis **puros**,  $SARMA(P, Q)_s$  são definidos como

$$\Phi(B^s)(Y_t - \mu) = \Theta(B^s)\epsilon_t$$

$$\Phi(B^s) = 1 - \Phi_1 B^s - \Phi_2 B^{2s} - \Phi_3 B^{3s} - \dots - \Phi_P B^{Ps}$$

$$\Theta(B^s) = 1 + \Theta_1 B^s + \Theta_2 B^{2s} + \Theta_3 B^{3s} + \dots + \Theta_Q B^{Qs}$$

$$\epsilon_t \sim RB(0, \sigma^2)$$



# Modelos SARMA (puros)

- Quando  $s = 1$ , temos um modelo ARMA(p,q).
- Exemplo, se  $P = Q = 1$  e  $s = 2$ , temos que:

$$(1 - \Phi_1 B^2)(Y_t - \mu) = (1 + \Theta_1 B^2)\epsilon_t$$

$$Y_t = \mu + \Phi_1(Y_{t-2} - \mu) + \Theta_1\epsilon_{t-2} + \epsilon_t$$

# Modelos SARMA

- O termo “sazonalidade pura” indica que somente as observações/ruídos brancos de ordem  $s$  (sazonalidade), são considerados no modelo. Em geral, (somente) valores da FAC dessa ordem ( $\rho(k)$ ) tendem a ser (mais) significativos.
- Ou seja, o modelo anterior se **assemelha** à um modelo ARMA. Contudo, as defasagens nas observações ( $Y_t$ ) e nos erros ( $\epsilon_t$ ), que são consideradas no modelo, dependem da ordem da sazonalidade ( $s$ ).
- À rigor, os modelos SARMA, tem uma estrutura ARMA, em múltiplos como função da ordem da sazonalidade ( $s$ ). Ou seja, tal processo é como um processo ARMA, porém com operadores definidos em múltiplos de  $s$ .

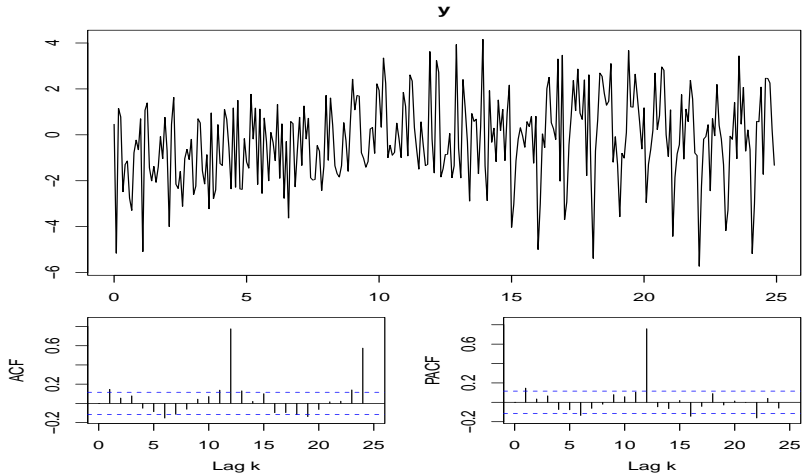
# Modelos SARMA

- Assim, o que fora visto em termos de estimação, previsão e diagnóstico ([aqui](#), [aqui](#)) para os modelos ARMA, pode ser adaptado para os modelos SARMA.
- Portanto, o processo SARMA é causal somente quando as raízes do polinômio  $\Phi(z^s)$  são maiores que um, em modulo, e é invertível somente quando as raízes do polinômio  $\Theta(z^s)$  são maiores que um, em modulo.

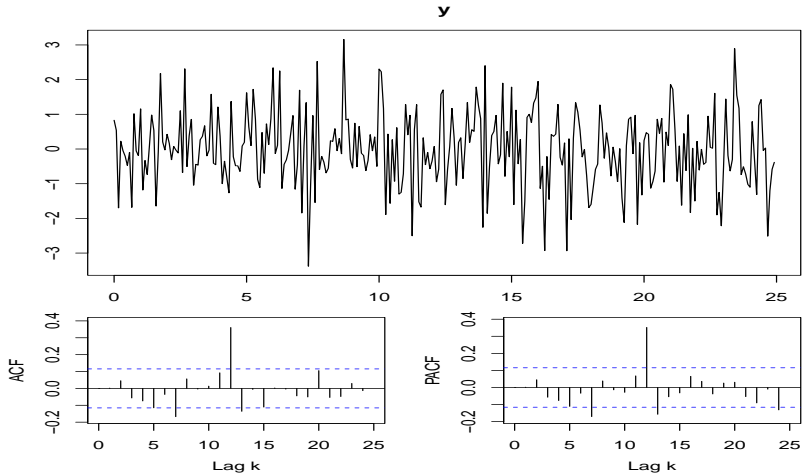
# Modelos SARMA

- Além disso, como pode ser visto nos gráficos das respectivas séries simuladas (próximos slides), as correlações tendem a ser maiores (significativas) para observações com distância equivalente aos períodos de sazonalidade ( $s$ ). Ou seja,  $\gamma(s)$ .
- Portanto, esse tipo de modelo é apropriado quando as correlações (significativas) são sazonais (ou seja, que oscilam/há uma periodicidade) mas não-seriais (que tende a decrescer com o aumento da distância entre as observações).

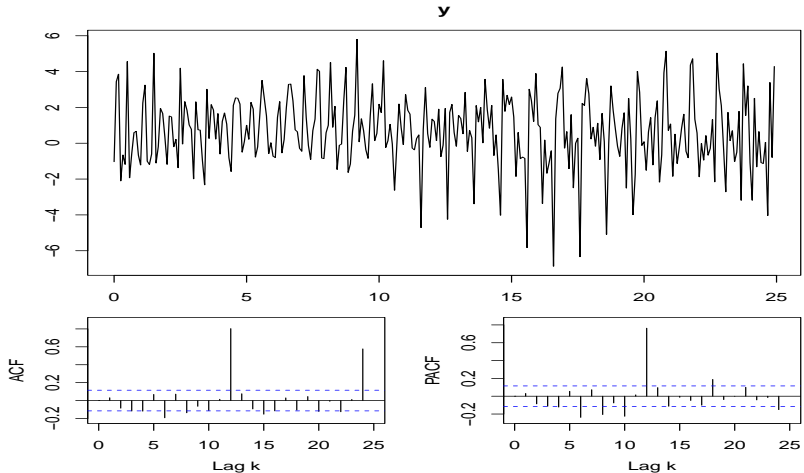
# Série simulada $SARMA(1, 0)_{12}$ , $\Phi_1 = 0,8$



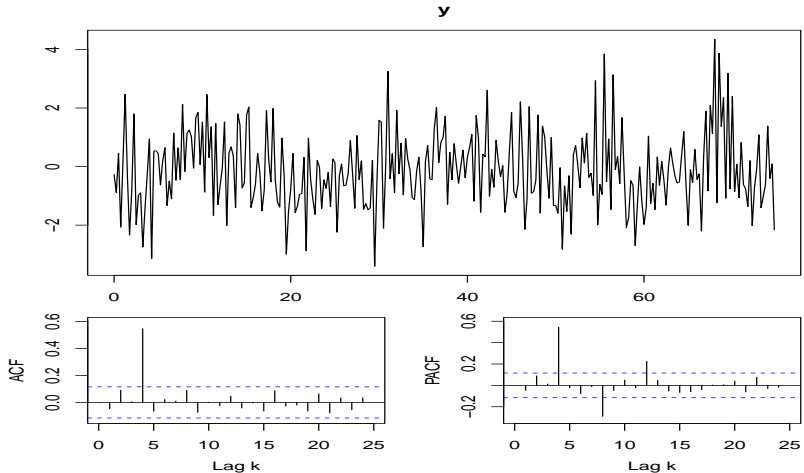
# Série simulada $SARMA(0, 1)_{12}, \Theta_1 = 0,5$



# Série simulada $SARMA(1, 1)_{12}$ , $\Phi_1 = 0,8$ ; $\Theta_1 = 0,5$

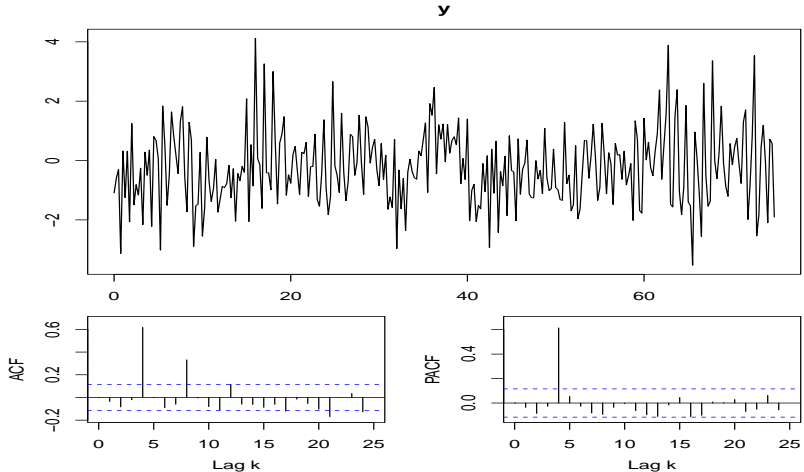


# Série simulada $SARMA(3,0)_4$ , $\Phi = (0,8; -0,5; 0,3)'$



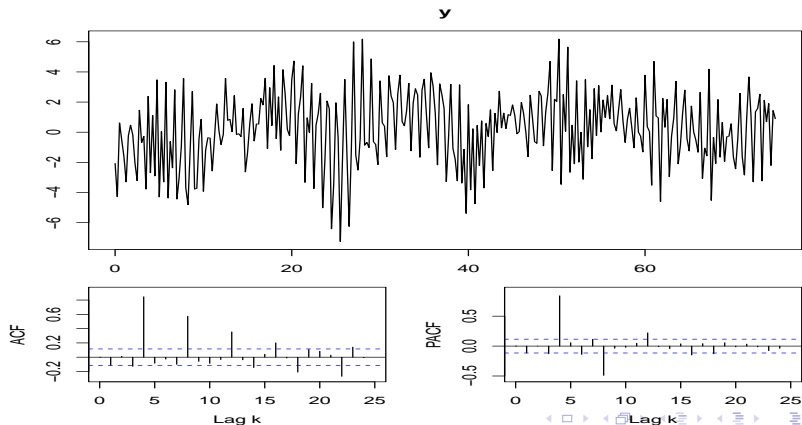


# Série simulada $SARMA(0, 3)_4$ , $\Theta = (0, 7; 0, 5; 0, 3)$



Série simulada  $SARMA(3, 3)_4$ ,  $\Phi = (0, 8; -0, 5; 0, 3)'$ ,

$\Theta = (0, 7; 0, 5; 0, 3)'$



## Mais exemplos: $SARMA(1, 0)_{12}$

- Tal modelo é dado por:

$$(1 - \Phi_1 B^{12}) Y_t = \epsilon_t,$$

$$Y_t = \Phi_1 Y_{t-12} + \epsilon_t,$$

- Note que este modelo é causal e invertível se  $|\Phi_1| < 1$ . Analogamente aos processos ARMA, a FACV é dada por:

$$\gamma(k) = \begin{cases} \sigma^2/(1 - \Phi_1^2), & \text{se } k = 0 \\ \sigma^2 \Phi_1^k / (1 - \Phi_1^2), & \text{se } k = \dots, -24, -12, 12, 24 \\ 0, \text{ c.c.} \end{cases}$$

## Mais exemplos: $SARMA(1, 0)_{12}$

- Observe que para as defasagens que não são múltiplos de 12, as autocovariâncias são iguais a zero.
- O modelo anterior seria apropriado, por exemplo, no caso em que as observações correspondam a vendas mensais, e, assim, as vendas de uma dado mês dependem das vendas do mesmo mês, no ano anterior, segundo uma estrutura AR(1).
- Exercício: apresente a versão do modelo anterior com  $\mu \neq 0$  e calcule a FAC:  $\rho(k)$ .

## Mais exemplos: $SARMA(0, 1)_4$

- Tal modelo é dado por:

$$Y_t = (1 - \Theta_1 B^4) \epsilon_t$$

$$Y_t = \Theta_1 \epsilon_{t-4} + \epsilon_t$$

- Note que este modelo é invertível se  $|\Theta_1| < 1$ . A FACV é dada por:

$$\gamma(k) = \begin{cases} \sigma^2(1 + \Theta_1^2), & \text{se } k = 0 \\ \Theta_1 \sigma^2, & \text{se } |k| = 4 \\ 0, \text{ c.c.} & \end{cases}$$

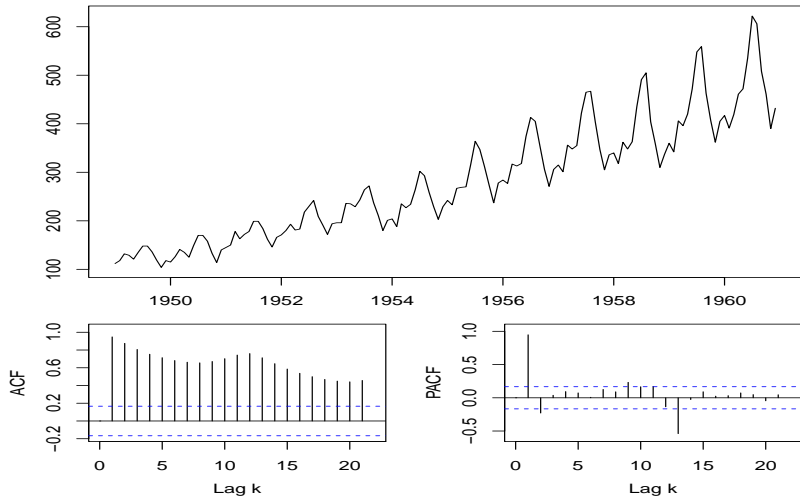
# Modelos SARMA

- A FACV (FAC) dos processos  $SARMA(P, Q)_s$  apresenta o mesmo comportamento (qualitativo) que os processos ARMA, nos tempos múltiplos de  $s$ .
- O modelo anterior seria apropriado, por exemplo, em que as observações correspondem a vendas mensais, e, assim as vendas de um dado mês dependem das vendas do mesmo mês, no ano anterior, segundo uma estrutura  $MA(1)$ .
- Exercício: apresente a versão do modelo anterior com  $\mu \neq 0$  e calcule a respectiva FAC:  $\rho(k)$ .
- Exercício: Encontre as condições de causalidade e invertibilidade do processo  $SARMA(1, 1)_{12}$  definido como:  $(1 - \Phi_1 B^{12}) Y_t = (1 + \Theta_1 B^{12}) \epsilon_t$

# Comentários

- Notamos assim, que os modelos *SARMA* são como modelos *ARMA*, com estruturas de correlação particulares, induzidas pela sazonalidade do processo.
- A FAC e a FACP dos processos *SARMA* são semelhantes as do processo *ARMA*, definida pela estrutura de sazonalidade.
- Entretanto, comumente, na prática, encontramos *ST* sazonais não estacionárias. Por exemplo, os dados sobre o número de passageiros (próximo slide).

## AirPassengers



**Figura:** Totais mensais de passageiros de companhias aéreas internacionais, 1949 a 1960.



# Modelos SARIMA (puros)

- Os modelos SARMA são úteis para séries estacionárias com sazonalidade pura.
- Quando a ST apresenta sazonalidade pura, mas não estacionariedade, podemos considerar uma versão ARIMA, para os modelos SARMA.
- Os modelo SARIMA é construído a partir do modelo SARMA, de modo semelhante aos modelos ARIMA e ARMA.
- Primeiramente, definamos o operador diferença sazonal.

$$\nabla_s^D Y_t = (1 - B^s)^D Y_t, D \in \{1, 2, \dots\}$$

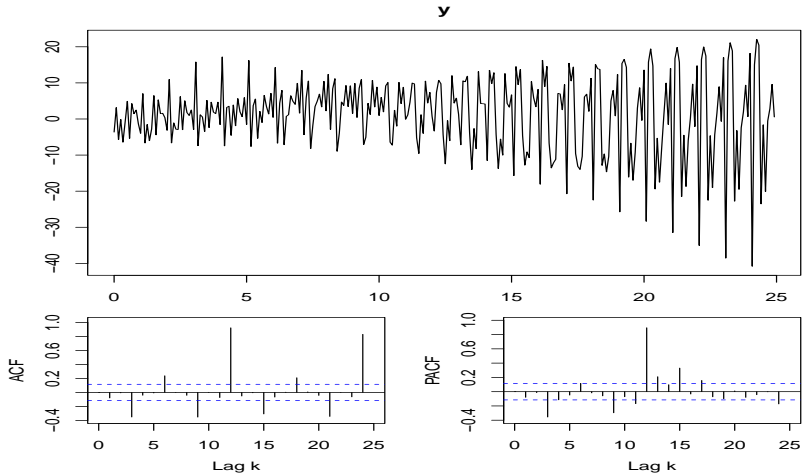
# Modelos SARIMA (puros)

- O modelo  $SARIMA(P, D, Q)_s$  (puro, no mesmo sentido do que fora apresentado para os modelos SARMA) é definido como

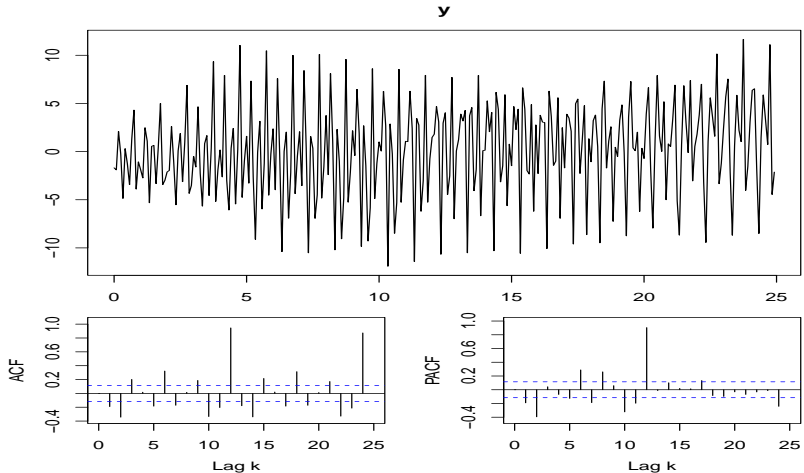
$$\Phi(B^s)(1 - B^s)^D(Y_t - \mu) = \Theta(B^s)\epsilon_t$$

- Note que o processo acima é como o ARIMA, com periodicidade  $s$ .
- Com efeito, se  $s = 1$ , temos um processo **ARIMA**.
- Assim, o que fora visto em termos de estimação, previsão e diagnóstico (**aqui**) para os modelos ARMA, pode ser adaptado para os modelos SARMA.
- Nos próximos slides veremos alguns exemplos gráficos de processos SARIMA.

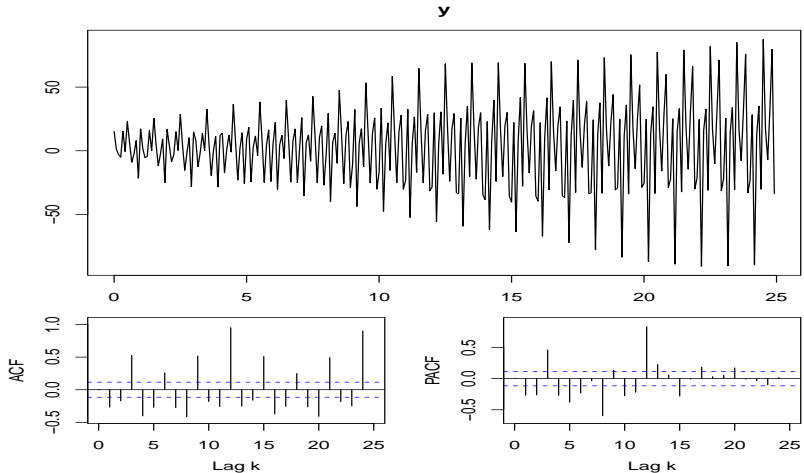
# Série simulada $SARIMA(1, 1, 0)_{12}$ , $\Phi_1 = 0,8$



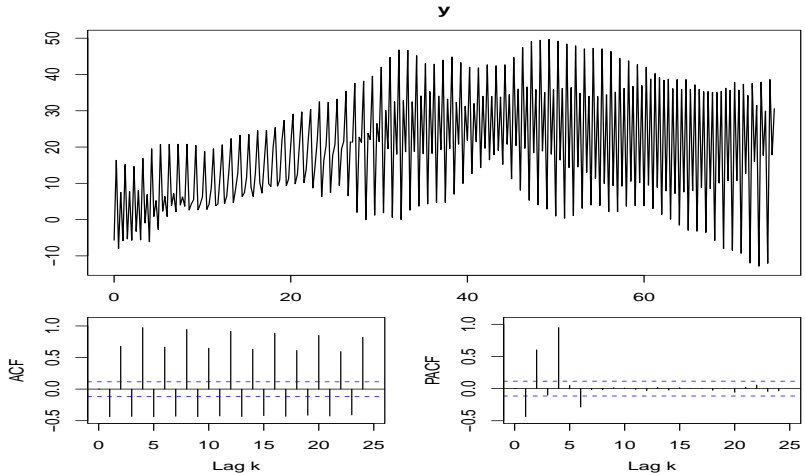
# Série simulada $SARIMA(0, 1, 1)_{12}, \Theta_1 = 0,5$



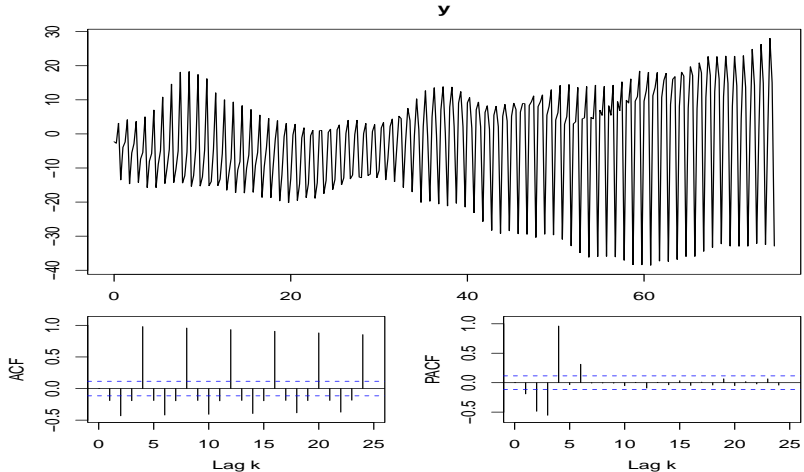
# Série simulada $SARIMA(1, 1, 1)_{12}$ , $\Phi_1 = 0,8$ , $\Theta_1 = 0,5$



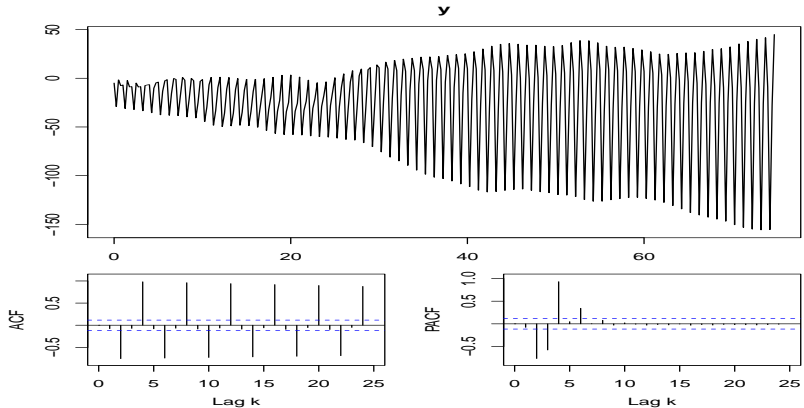
# Série simulada $SARIMA(3, 1, 0)_4$ , $\Phi = (0, 8; -0, 5; 0, 3)'$



# Série simulada $SARIMA(0, 1, 3)_4, \Theta = (0, 7; 0, 5; 0, 3)$



Série simulada  $SARIMA(3, 1, 3)_4$ ,  $\Phi = (0, 8; -0, 5; 0, 3)'$ ,  
 $\Theta = (0, 7; 0, 5; 0, 3)'$





# Comentários

- Notamos assim, que os modelos *SARIMA* são como modelos *ARIMA*, com estruturas de correlação particulares, induzidas pela sazonalidade do processo.
- A FAC e a FACP dos processos *SARIMA* são semelhantes as do processo *ARIMA*, definida pela estrutura de sazonalidade.
- Note que as estruturas (amostrais) da FAC e FACP para os modelos *SARIMA* (*SARMA*) podem não indicar, de forma “simples”, possíveis modelos apropriados.

# Comentários

- Além disso, esses processos são úteis quando há uma sazonalidade “pura”, ou seja, quando no processo faz sentido considerar somente os termos correspondentes à sazonalidade (termos de ordem  $s$ ).
- Entretanto, em algumas situações, além da dependência de termos relativos à sazonalidade (ordem  $s$ ), pode haver dependência de termos antes ou depois de  $s$  (sazonalidade multiplicativa).
- Por exemplo, a temperatura/pluviosidade de uma dada mês pode depender não somente das medidas do mesmo mês de anos anteriores, mas também de outros meses.

# Comentários

- Com efeito, é muito mais comum encontrar sazonalidade multiplicativa, do que pura.
- Para esse tipo de situação é mais apropriado combinar a parte sazonal pura com a parte ARIMA (ARMA).
- Neste caso, temos uma classe ampla de modelos para ST:
  - Os Modelos Multiplicativos Sazonais Autoregressivos Integrados de Médias Moveis:  $SARIMA(p, d, q)(P, D, Q)_s$ .
- Note que devemos distinguir os tipos de modelo SARIMA, através da colocação ou não dos termos  $(p, d, q)$ ,  $(P, D, Q)$ .

# SARIMA (multiplicativo)

- Dizemos que  $\{Y_t\}$  é um processo SARIMA( $p, d, q$ )( $P, D, Q$ ) $_s$  de média  $\mu$  se for definido como:

$$\Phi(B^s)\phi(B)(1 - B^s)^D(1 - B)^d(Y_t - \mu) = \Theta(B^s)\theta(B)\epsilon_t,$$

em que  $\epsilon_t \sim RB(0, \sigma^2)$  e

$$\Phi(B^s) = 1 - \Phi_1 B^s - \Phi_2 B^{2s} - \dots - \Phi_P B^{Ps},$$

$$\Theta(B^s) = 1 + \Theta_1 B^s + \Theta_2 B^{2s} + \dots + \Theta_Q B^{Qs},$$

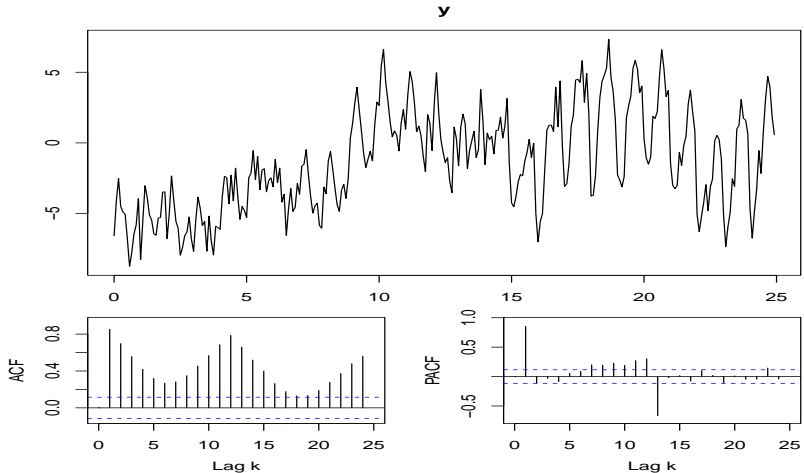
$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B^1 - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p,$$

$$\theta(B) = 1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \dots + \theta_q B^q,$$

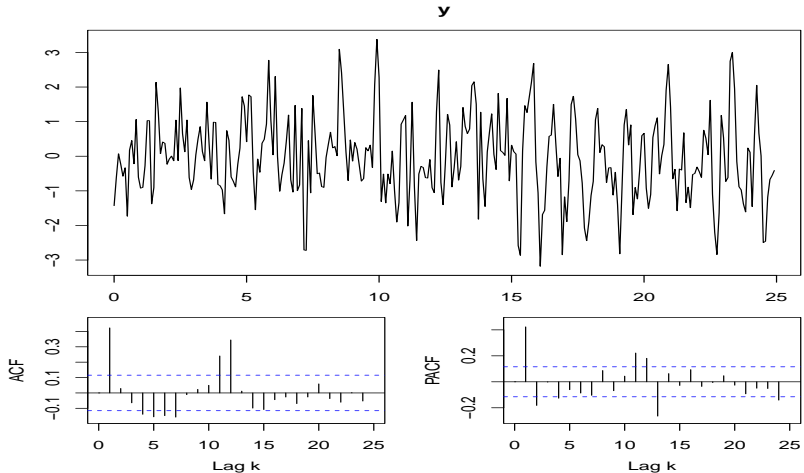
# SARIMA

- A análise da estrutura de dependência desse modelo, por exemplo através da FAC e FACP, realiza-se combinando o comportamento da parte sazonal (periódica) e da parte pura (lag a lag). Veja os exemplos a seguir.
- Com relação à estimação, a partir da estrutura do slide anterior, podemos, por exemplo, construir a verossimilhança (ainda que de forma aproximada) baseada em todas as observações. O que fora apresentado (inclusive para outros métodos de estimação) para os modelos [ARMA](#) e [ARIMA](#), podem ser adaptados. Veja também [aqui](#) e [aqui](#).
- Com relação à parte residual, podemos utilizar o que fora apresentado [aqui](#). Falaremos sobre previsão, mais a frente.

# Série simulada $SARMA(1, 0)(1, 0)_{12}, \phi_1, \Phi_1 = 0, 8$

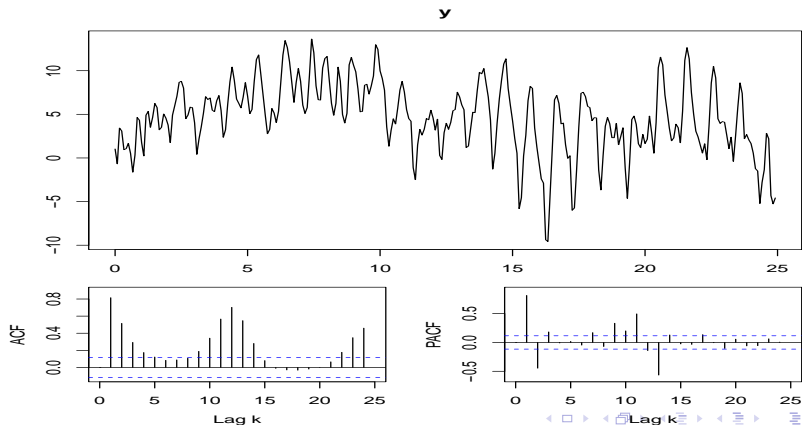


# Série simulada $SARMA(0, 1)(0, 1)_{12}, \theta_1, \Theta_1 = 0, 5$



Série simulada  $SARMA(1, 1)(1, 1)_{12}$ ,  $\phi_1, \Phi_1 = 0,8$ ;

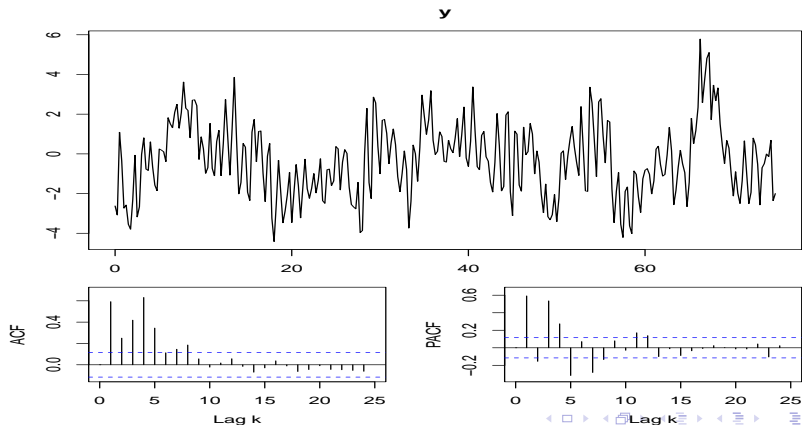
$\theta_1, \Theta_1 = 0,5$



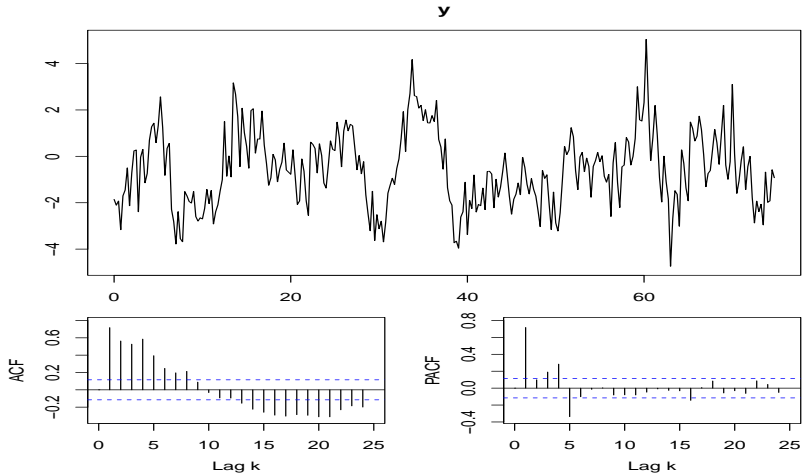


Série simulada  $SARMA(3, 0)(3, 0)_4$ ,

$$\phi, \Phi = (0, 8; -0, 5; 0, 3)'$$

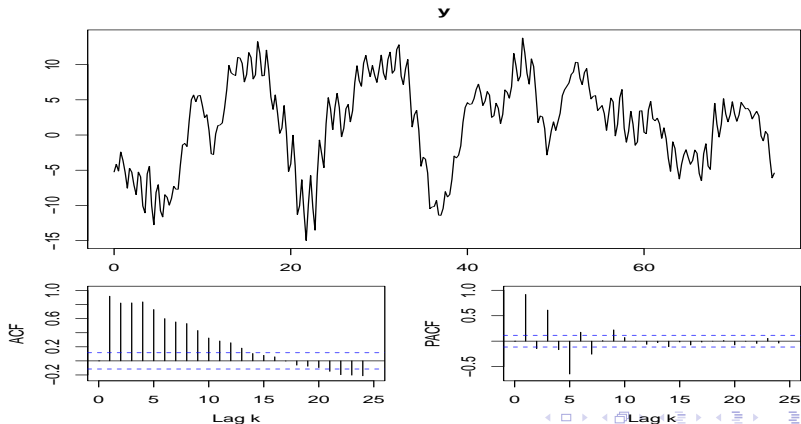


# Série simulada $SARMA(0, 3)(0, 3)_4$ , $\theta, \Theta = (0, 7; 0, 5; 0, 3)'$

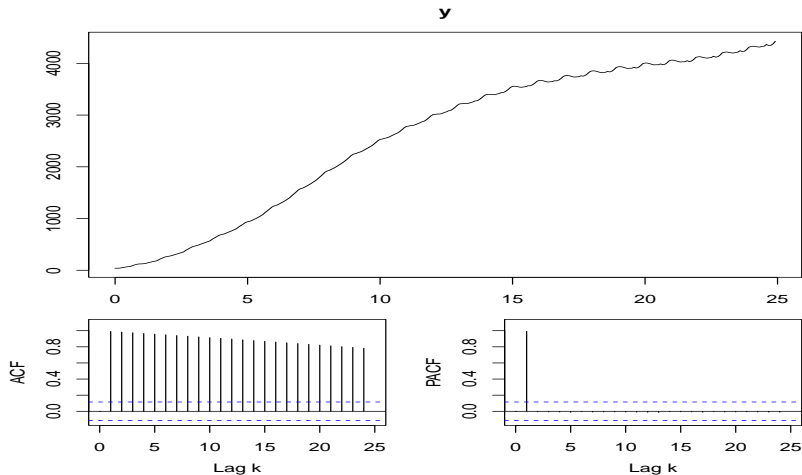


Série simulada  $SARMA(3, 3)(3, 3)_4$ ,

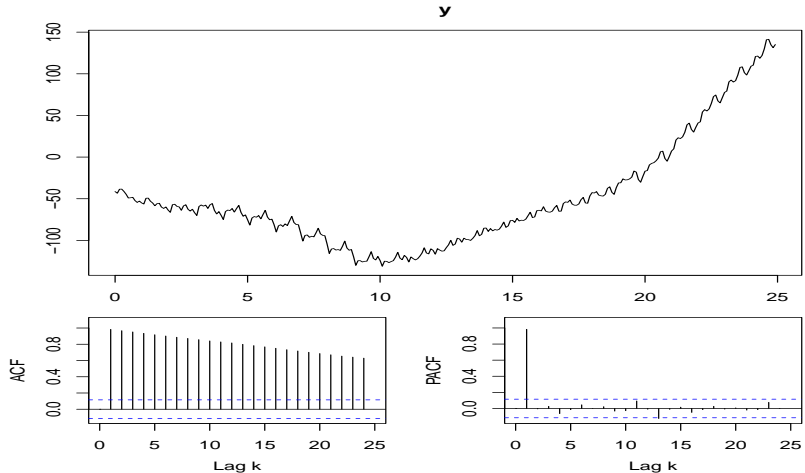
$\phi, \Phi = (0, 8; -0, 5; 0, 3)'$ ,  $\theta, \Theta = (0, 7; 0, 5; 0, 3)'$



# Série simulada $SARIMA(1, 1, 0)(1, 1, 0)_{12}, \phi_1, \Phi_1 = 0,8$

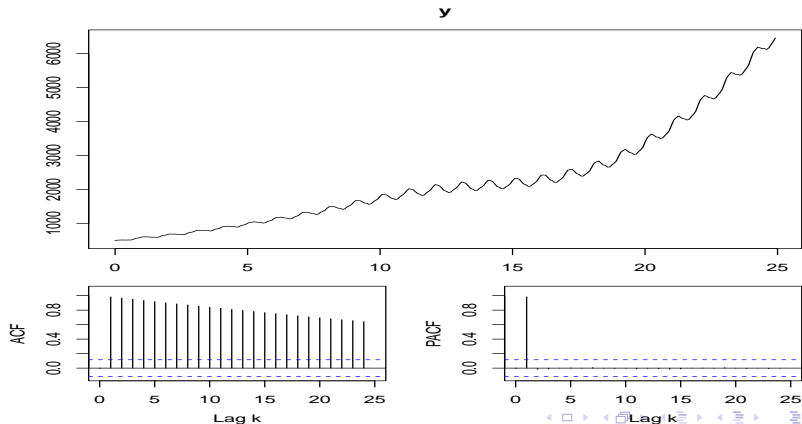


# Série simulada $SARIMA(0, 1, 1)(0, 1, 1)_{12}, \theta_1, \Theta_1 = 0,5$



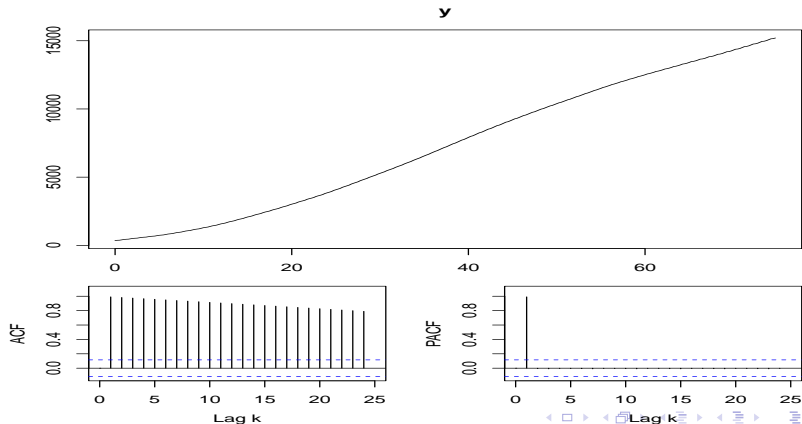
Série simulada  $SARIMA(1, 1, 1)(1, 1, 1)_{12}$ ,  $\phi_1, \Phi_1 = 0,8$ ,

$\theta_1, \Theta_1 = 0,5$



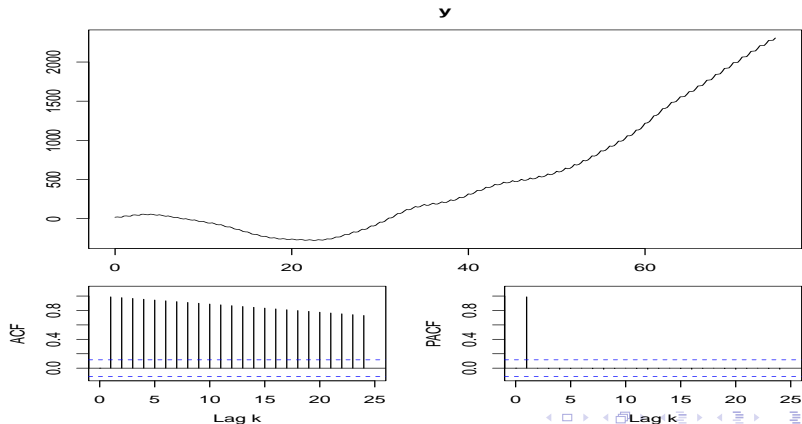
Série simulada  $SARIMA(3, 1, 0)(3, 1, 0)_4$ ,

$$\phi, \Phi = (0, 8; -0, 5; 0, 3)'$$



Série simulada  $SARIMA(0, 1, 3)(0, 1, 3)_4$ ,

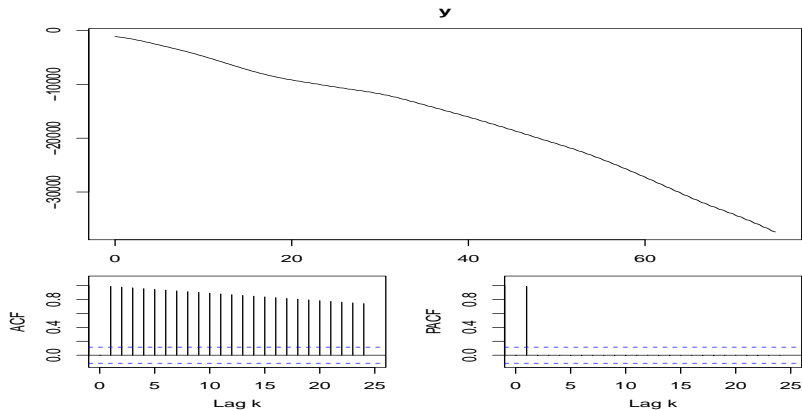
$\theta, \Theta = (0, 7; 0, 5; 0, 3)$





Série simulada  $SARIMA(3, 1, 3)(3, 1, 3)_4$ ,

$\phi, \Phi = (0, 8; -0, 5; 0, 3)'$ ,  $\theta, \Theta = (0, 7; 0, 5; 0, 3)'$



# SARMA

- Um caso particular dos modelos SARIMA são os processos SARIMA não-integrados ou SARMA, nos quais não se considera a diferenciação.
- Como visto anteriormente, dizemos que  $\{Y_t\}$  é um processo SARMA( $p, q$ )( $P, Q$ ) $_s$  de média  $\mu$  se for definido como:

$$\Phi(B^s)\phi(B)(Y_t - \mu) = \Theta(B^s)\theta(B)\epsilon_t,$$

em que  $\epsilon_t \sim RB(0, \sigma^2)$  e as outras componentes como definidas anteriormente.

# SARMA

- Um processo SARMA pode ser reescrito como um processo ARMA, como veremos a seguir.
- **Exemplo:** considere  $\{Y_t\}$  um processo SARMA(1,0)(1,0)<sub>12</sub>, o qual é escrito como:

$$\begin{aligned}(1 - \phi B)(1 - \Phi B^{12})Y_t &= \epsilon_t, \\ (1 - \phi B - \Phi B^{12} + \phi\Phi B^{13})Y_t &= \epsilon_t,\end{aligned}$$

que nada mais é do que um ARMA(13,0) com  $\phi_1 = \phi$ ,  $\phi_2 = \phi_3 = \dots = \phi_{11} = 0$ ,  $\phi_{12} = \Phi$  e  $\phi_{13} = \phi\Phi$ .

# SARMA

- No caso geral temos que um modelo  $SARMA(p, q)(P, Q)_s$  é um modelo  $ARMA(p + sP, q + sQ)$  com restrições (resultado particularmente nas questões relativas a estimação e previsão).
- Por um outro lado, o modelo SARMA é mais interpretável, parcimonioso e não traz restrições relativas a seus parâmetros.

## Alguns casos particulares (lista não exaustiva)

- $SARIMA(p, d, q)(P, D, Q)_{s=1} = SARIMA(p, d, q)$ .
- $SARIMA(p, d = 0, q)(P, D = 0, Q)_s = SARMA(p, q)(P, Q)_s$ .
- $SARIMA(p, d = 0, q)(P, D = 0, Q)_{s=1} = ARMA(p, q)$ .
- $SARIMA(p = 0, d = 0, q = 0)(P, D, Q)_s = SARIMA(P, D, Q)_s$ .
- $SARMA(p = 0, q = 0)(P, Q)_s = SARMA(P, Q)_s$ .