

Família exponencial

Prof. Caio Azevedo

Introdução aos MLG

- A classe dos MLG é definida, essencialmente, por duas componentes, a saber:
 - A distribuição da variável resposta, a qual deve pertencer à família exponencial (parte aleatória).
 - Uma função de ligação, a qual associa, de forma adequada, a média da variável resposta (μ_i) à um preditor linear ($g(\mu_i) = \mathbf{X}'_i\beta$).
 - Portanto, a classe de MRNLH é uma caso particular dos MLG.

Família exponencial (FE) bi-paramétrica

- Dizemos que uma v.a. Y (discreta ou contínua) pertence à família exponencial biparamétrica, nesse caso usaremos a notação $Y \sim FE(\theta, \phi)$, se sua fdp é dada por:

$$f_Y(y; \theta, \phi) = \exp \{ \phi [y\theta - b(\theta)] + c(y, \phi) \} \mathbb{1}_A(y) \quad (1)$$

Família exponencial (FE) bi-paramétrica

em que $\theta \in \Theta \subset \mathfrak{R}$ (espaço paramétrico de θ), $b(\theta) : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$,
 $c(y, \phi) : A \times \mathfrak{R}^+ \rightarrow \mathfrak{R}$, A é um conjunto que não depende nem de θ nem
de ϕ (esta é uma das condições de regularidade) e, por sua vez, $\phi(\phi > 0)$
é o parâmetro de precisão.

- Também trabalharemos com distribuições pertencentes à família exponencial uniparamétrica, ou seja, se $\phi = 1$. Nesse caso $Y \sim FE(\theta)$.

Comentários

- Diversas distribuições pertencem à essa classe, p.e.: normal, normal inversa, gama (exponencial), Poisson, binomial (Bernoulli), binomial negativa (sob certa circunstância), dentre outras.
- Há diversas outras classes de distribuições: família Tweedie, família de localização-escala, mistura de escala, mistura de localização-escala, família elíptica, dentre outras.
- Na maior parte do curso, nos concentraremos em distribuições pertencente à FE.

Comentários

- Quando a média (valor esperado) não aparecer explicitamente na fdp (função de probabilidade, caso discreto; função densidade de probabilidade, ou simplesmente, densidade, caso contínuo), a reparametrizaremos de modo a deixar a média explícita.
- Podemos também utilizar a notação $f_Y(\cdot)$ para designar uma fdp, ou seja, sem especificar seus parâmetros.

Propriedades

- Se $Y \sim FE(\theta, \phi)$, então:
 - $\mathcal{E}(Y) = \mu = b'(\theta) = \frac{\partial b(\theta)}{\partial \theta}$.
 - $\mathcal{V}(Y) = \phi^{-1}V(\mu)$, em que $V(\mu) = \frac{d\mu}{d\theta} = b''(\theta) = \frac{\partial^2 b(\theta)}{\partial \theta^2}$ (por isso ϕ é chamado de parâmetro de precisão, pois quanto maior seu valor, menor será a variância). $V(\cdot)$ é chamada de função de variância.
- Vamos provar as duas propriedades acima, para o caso contínuo. A prova para o caso discreto é análoga, substituindo-se as integrais por somatórios. Utilizaremos a notação $f_Y(y; \theta, \phi) \equiv f_Y(y)$

Propriedades

- Sob certas condições de regularidade, temos que

$$\mathcal{E} \left(\frac{\partial \ln f_Y(Y)}{\partial \theta} \right) = 0 \text{ e } \mathcal{E} \left(\frac{\partial^2 \ln f_Y(Y)}{\partial \theta^2} \right) = -\mathcal{E} \left[\left(\frac{\partial \ln f_Y(Y)}{\partial \theta} \right)^2 \right].$$

- (Primeira igualdade) Temos que :

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \left(\frac{\partial \ln f_Y(Y)}{\partial \theta} \right) &= \int_A \frac{\partial \ln f_Y(y)}{\partial \theta} f_Y(y) dy \\ &= \int_A \frac{\partial f_Y(y)}{\partial \theta} \frac{1}{f_Y(y)} f_Y(y) dy = \int_A \frac{\partial f_Y(y)}{\partial \theta} dy \\ &\stackrel{*}{=} \frac{\partial}{\partial \theta} \underbrace{\int_A f_Y(y) dy}_1 = \frac{\partial}{\partial \theta} 1 = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

* sob as condições de regularidade.

Propriedades

- Por outro lado, note que (regra da derivada do quociente)

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \ln f_Y(y)}{\partial \theta^2} &= \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \ln f_Y(y)}{\partial \theta} \right) = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial f_Y(y)}{\partial \theta} \frac{1}{f_Y(y)} \right) \\ &= \left[\frac{\partial^2 f_Y(y)}{\partial \theta^2} f_Y(y) - \left(\frac{\partial f_Y(y)}{\partial \theta} \right)^2 \right] \frac{1}{f_Y^2(y)} \\ &= \frac{\partial^2 f_Y(y)}{\partial \theta^2} \frac{1}{f_Y(y)} - \left(\frac{\partial f_Y(y)}{\partial \theta} \right)^2 \frac{1}{f_Y(y)^2} \\ &= \frac{\partial^2 f_Y(y)}{\partial \theta^2} \frac{1}{f_Y(y)} - \left(\frac{\partial \ln f_Y(y)}{\partial \theta} \right)^2\end{aligned}\tag{3}$$

- (Segunda igualdade) Tomando o valor esperado de (3), vem que (* sob as condições de regularidade.):

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E} \left(\frac{\partial^2 \ln f_Y(Y)}{\partial \theta^2} \right) &= \int_A \frac{\partial^2 \ln f_Y(y)}{\partial \theta^2} f_Y(y) dy \\
 &= \int_A \left(\frac{\partial^2 f_Y(y)}{\partial \theta^2} \frac{1}{f_Y(y)} - \left(\frac{\partial \ln f_Y(y)}{\partial \theta} \right)^2 \right) f_Y(y) dy \\
 &= \int_A \frac{\partial^2 f_Y(y)}{\partial \theta^2} dy - \int_A \left(\frac{\partial \ln f_Y(y)}{\partial \theta} \right)^2 f_Y(y) dy \\
 &\stackrel{*}{=} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \underbrace{\int_A f_Y(y) dy}_1 - \mathcal{E} \left[\left(\frac{\partial \ln f_Y(y)}{\partial \theta} \right)^2 \right] \\
 &= \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} 1 - \mathcal{E} \left[\left(\frac{\partial \ln f_Y(y)}{\partial \theta} \right)^2 \right] = -\mathcal{E} \left[\left(\frac{\partial \ln f_Y(y)}{\partial \theta} \right)^2 \right]
 \end{aligned}$$

- Por (2), temos também que:

$$\begin{aligned} \mathcal{V} \left(\frac{\partial \ln f_Y(Y)}{\partial \theta} \right) &= \mathcal{E} \left[\left(\frac{\partial \ln f_Y(Y)}{\partial \theta} \right)^2 \right] - \underbrace{\left[\mathcal{E} \left(\frac{\partial \ln f_Y(Y)}{\partial \theta} \right) \right]^2}_0 \\ &= \mathcal{E} \left[\left(\frac{\partial \ln f_Y(Y)}{\partial \theta} \right)^2 \right] = -\mathcal{E} \left(\frac{\partial^2 \ln f_Y(Y)}{\partial \theta^2} \right) \quad (5) \end{aligned}$$

- Voltando à fdp da FE (equação (1)), temos que

$$\frac{\partial \ln f_Y(y)}{\partial \theta} = \phi [y - b'(\theta)] \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 \ln f_Y(y)}{\partial \theta^2} = -\phi b''(\theta) \quad (7)$$

- De (2) em (6), vem que:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}\left(\frac{\partial \ln f_Y(y)}{\partial \theta}\right) &= \mathcal{E}[\phi(Y - b'(\theta))] = 0 \\ &\rightarrow \mathcal{E}(Y) = b'(\theta)\end{aligned}$$

- De (4) e (5) em (7), temos que:

$$\begin{aligned}\mathcal{V}\left(\frac{\partial \ln f_Y(Y)}{\partial \theta}\right) &= -\mathcal{E}\left(\frac{\partial^2 \ln f_Y(Y)}{\partial \theta^2}\right) \\ &\rightarrow \mathcal{V}[\phi(Y - b'(\theta))] = -\mathcal{E}(-\phi b''(\theta)) \\ &\rightarrow \phi^2 \mathcal{V}(Y) = \phi b''(\theta) \rightarrow \mathcal{V}(Y) = b''(\theta) \phi^{-1}\end{aligned}$$

Exemplo: Poisson

$Y \sim \text{Poisson}(\lambda)$, $\lambda > 0$, então $A = \{0, 1, 2, \dots\}$ e

$$\begin{aligned}f_Y(y) &= \frac{e^{-\lambda} \lambda^y}{y!} = \exp \{y \ln(\lambda) - \lambda - \ln(y!)\} \\ &= \exp \{ \phi [y\theta - b(\theta)] + c(y, \phi) \}\end{aligned}$$

em que $\theta = \ln(\lambda)$, $b(\theta) = \exp(\theta)$, $\phi = 1$, $c(y, \phi) = -\ln(y!)$

Exemplo: Binomial

Seja Y^* a proporção de sucessos em n ensaios de Bernoulli independentes. Logo, temos que $nY^* \sim \text{binomial}(n, \mu)$. Nesse caso $\mathcal{E}(Y^* = \mu), \mu \in (0, 1)$. Além disso, em termos da distribuição de Y^* (exercício), temos que $A = \{0, 1/n, 2/n, \dots, 1\}$ e

$$\begin{aligned} f_{Y^*}(y^*) &= \binom{n}{ny^*} \mu^{ny^*} (1 - \mu)^{n - ny^*} = \exp \left\{ \ln \binom{n}{ny^*} + ny^* \ln \left(\frac{\mu}{1 - \mu} \right) \right. \\ &\quad \left. + n \ln(1 - \mu) \right\} = \exp \left\{ n \left[y^* \ln \left(\frac{\mu}{1 - \mu} \right) + \ln(1 - \mu) \right] + \ln \binom{n}{ny^*} \right\} \\ &= \exp \{ \phi [y\theta - b(\theta)] + c(y, \phi) \} \end{aligned}$$

Exemplo: Binomial

em que $\theta = \ln\left(\frac{\mu}{1-\mu}\right)$, $b(\theta) = \ln(1 + e^\theta)$, $\phi = n$, $c(y^*, \phi) = \ln\left(\frac{\phi}{\phi y^*}\right)$.

- Se $n = 1$, $Y^* = Y \sim \text{Bernoulli}(\mu)$.

Exemplo: Normal

Seja $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$, temos que $A = (-\infty, \infty)$,
 $\mu \in (-\infty, \infty)$, $\sigma^2 \in (0, \infty)$ e

$$\begin{aligned}f_Y(y) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(y-\mu)^2\right\} \\&= \exp\left\{\frac{1}{\sigma^2}\left(\mu y - \frac{\mu^2}{2}\right) - \frac{1}{2}\left[\ln(2\pi\sigma^2) + \frac{y^2}{\sigma^2}\right]\right\} \\&= \exp\{\phi[y\theta - b(\theta)] + c(y, \phi)\}\end{aligned}$$

em que $\theta = \mu$, $b(\theta) = \frac{\theta^2}{2}$, $\phi = \sigma^{-2}$, $c(y, \phi) = \frac{1}{2}\ln(\phi/2\pi) - \frac{\phi y^2}{2}$.

Exemplo: gama

Usualmente consideramos $Y \sim \text{gama}(a, b)$, $a, b > 0$, em que $\mathcal{E}(Y) = ab$, $\mathcal{V}(Y) = ab^2$ e $A = (-\infty, \infty)$. Nesse caso $f(Y) = \frac{1}{\Gamma(a)b^a} y^{a-1} e^{-y/b}$.

Contudo, consideraremos uma outra parametrização que consiste em escrever a fdp de Y em termos de $\mu = \mathcal{E}(Y)$ e do parâmetro de precisão ϕ (exercício), de modo que $CV(Y) = DP(Y)/\mathcal{E}(Y) = \phi^{-1/2}$, o que implica que $\mathcal{V}(Y) = V(\mu)/\phi$.

Exemplo: Gamma

Assim:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{1}{\Gamma(\phi)} \left(\frac{\phi y}{\mu}\right)^\phi \exp\left\{-\frac{\phi y}{\mu}\right\} y^{-1} = \exp\left\{\phi \left[-\frac{y}{\mu} - \ln(\mu)\right]\right. \\ &\quad \left. - \ln \Gamma(\phi) + \phi \ln(\phi y) - \ln(y)\right\} = \exp\left\{\phi \left[-\frac{y}{\mu} - \ln(\mu)\right]\right. \\ &\quad \left. + (\phi - 1) \ln(y) + \phi \ln(\phi) - \ln \Gamma(\phi)\right\} = \exp\{\phi [y\theta - b(\theta)] + c(y, \phi)\} \end{aligned}$$

em que

$$\theta = -1/\mu, \quad b(\theta) = -\ln(-\theta), \quad c(y, \phi) = (\phi - 1) \ln(y) + \phi \ln(\phi) - \ln \Gamma(\phi).$$

Se $\phi = 1$, então $Y \sim \exp(\mu)$. Se $\phi = k/2$ e $\mu = k$, então $Y \sim \chi^2_{(k)}$

Exemplo: normal inversa

Seja $Y \sim NI(\mu, \phi)$, $\mu, \phi > 0$, então $A = (0, \infty)$ e

$$f_Y(y) = \frac{\phi^{1/2}}{\sqrt{2\pi y^3}} \exp\left\{-\frac{\phi(y - \mu)^2}{2\mu^2 y}\right\}$$

Exercício: colocar na forma da família exponencial.

Principais distribuições pertencentes à FE

Distribuição	$b(\theta)$	θ	ϕ	$V(\mu)$
Normal	$\theta^2/2$	μ	σ^{-2}	1
Poisson	e^θ	$\ln \mu$	1	μ
Binomial	$\ln(1 + e^\theta)$	$\ln(\mu/(1 - \mu))$	n	$\mu(1 - \mu)$
Gama	$-\ln(-\theta)$	$-1/\mu$	$1/(CV^2)$	μ^2
N.Inversa	$-\sqrt{-2\theta}$	$-1/2\mu^2$	ϕ	μ^3

OBS: θ é chamado de parâmetro canônico.