Mais exercícios e revisão

Prof. Caio Azevedo

Revisão sobre processos estacionários

- Defina z_i, as raízes dos polinômonios de interesse.
- AR(p): precisa verificar se é estacionário e/ou causal (sempre é invertível)

$$\phi(z) = 1 - \phi_1 z - ... - \phi_p z^p.$$

Se $|z_i| \neq 1$ o processo é estacionário se $|z_i| > 1$ é estacionário e causal.

- MA: precisa verificar se é invertível (sempre é estacionário e causal)

$$\theta(z) = 1 + \theta_1 z + ... + \theta_q z^q$$

Se $|z_i| > 1$ o processo é invertível.

Revisão sobre processos estacionários

- ARMA(p,q): precisa verificar se é estacionário e/ou causal e ou inversível.

$$\phi(z) = 1 - \phi_1 z - ... - \phi_p z^p.$$

Se $|z_i| \neq 1$ o processo é estacionário se $|z_i| > 1$ é estacionário e causal.

$$\theta(z) = 1 + \theta_1 z + ... + \theta_q z^q.$$

Se $|z_i| > 1$ o processo é invertível.

Revisão sobre processos estacionários

- $SARMA(P, Q)_s$ (sazonal)

$$\Phi(z) = 1 - \Phi_1 z^s - ... - \Phi_P z^{Ps}.$$

Se $|z_i| \neq 1$ o processo é estacionário se $|z_i| > 1$ é estacionário e causal.

$$\Theta(z) = 1 + \Theta_1 z^s + ... + \Theta_Q z^{Qs}.$$

Se $|z_i| > 1$ o processo é invertível.

- Equivalente aos modelos AR e MA, para os casos particulares ($SARMA(P, 0)_s$ e $SARMA(0, Q)_s$), respectivamente.

Revisão sobre processos estacionários

- $SARMA(p,q)(P,Q)_s$ (multiplicativo)

$$\begin{aligned}\phi(z) &= 1 - \phi_1 z - ... - \phi_p z^p \\ \Phi(z) &= 1 - \Phi_1 z^s - ... - \Phi_P z^{Ps}\end{aligned}$$

Se $|z_i| \neq 1$ (para ambos $\phi(.)$ e $\Phi(.)$) o processo é estacionário se $|z_i| > 1$ (para ambos $\phi(.)$ e $\Phi(.)$) é estacionário e causal.

Revisão dos processos estacionários

- $SARMA(p,q)(P,Q)_s$ (multiplicativo)

$$\begin{aligned}\theta(z) &= 1+\theta_1 z+...+\theta_p z^p\\ \Theta(z) &= 1+\Theta_1 z^s+...+\Theta_Q z^{Qs}\end{aligned}$$

Se $|z_i| > 1$ (para ambos $\theta(.)$ e $\Theta(.)$) o processo é invertível.

Revisão dos processos estacionários

- Em termos de modelagem, nos interessa processos que apresentem, simultaneamente, as três características.
- Para os processos não estacionários (ARIMA, SARIMA - puro e multiplicativo) não é necessário verificar tais características (somente para os erros/resíduos).

Exemplo

- Considere o processo (em que $\epsilon_t \sim RB(0, \sigma^2)$):

$$(1 - 0,9B)Y_t \quad = \quad (1 + 0,3B)\epsilon_t$$

- Temos que

$$\begin{aligned}(1 - 0,9B)Y_t &= (1 + 0,3B)\epsilon_t \\ Y_t &= 0,9Y_{t-1} + 0,3\epsilon_{t-1} + \epsilon_t\end{aligned}$$

que corresponde à um processo ARMA(1,1), em que $\phi = 0,9$ e $\theta = 0,3$.

Exemplo

- Além disso, temos que

$$\phi(z) = 0 \rightarrow 1 - 0,9z = 0 \rightarrow z = \frac{1}{0,9} \approx 1,11$$

assim, como $|z| > 1$ o processo é estacionário e causal.

- Por outro lado, tem-se que

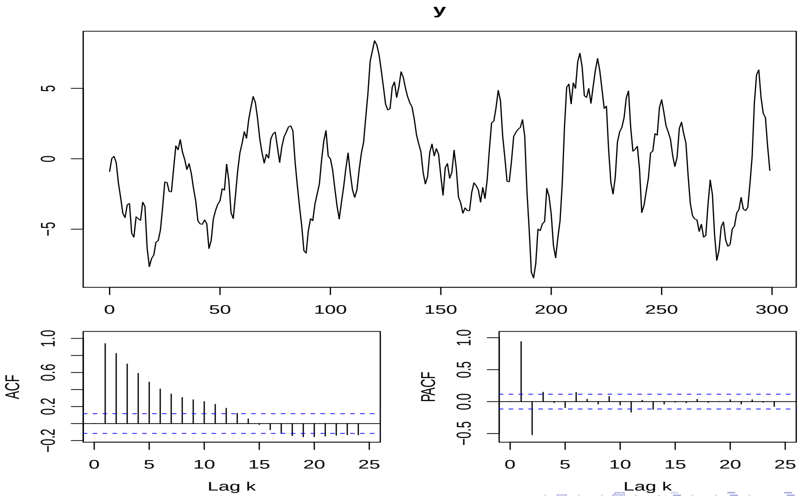
$$\phi(z) = 0 \rightarrow 1 + 0,3z = 0 \rightarrow z = -\frac{1}{0,3} \approx -3,33$$

assim, como $|z| > 1$ o processo é invertível.

ST, FAC e FACP - comportamentos gerais

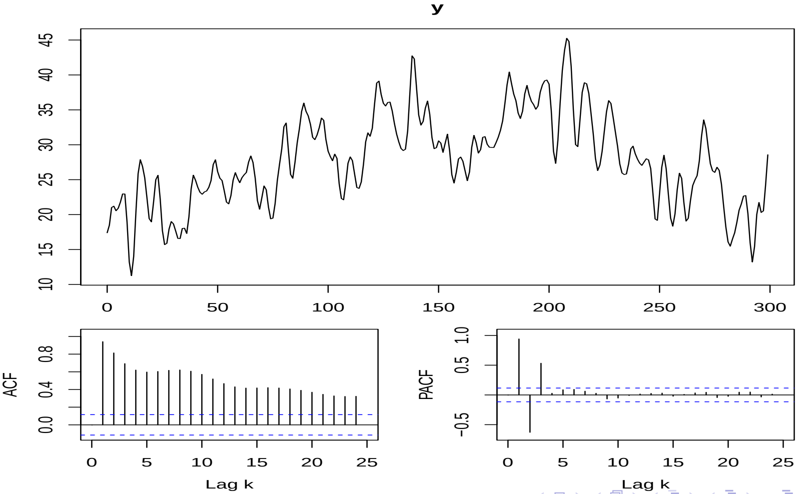
- Um resumo sobre as características esperadas (em geral) para os processos vistos em sala, a respeito de cada um dos aspectos acima pode ser encontrado aqui.

Exemplo

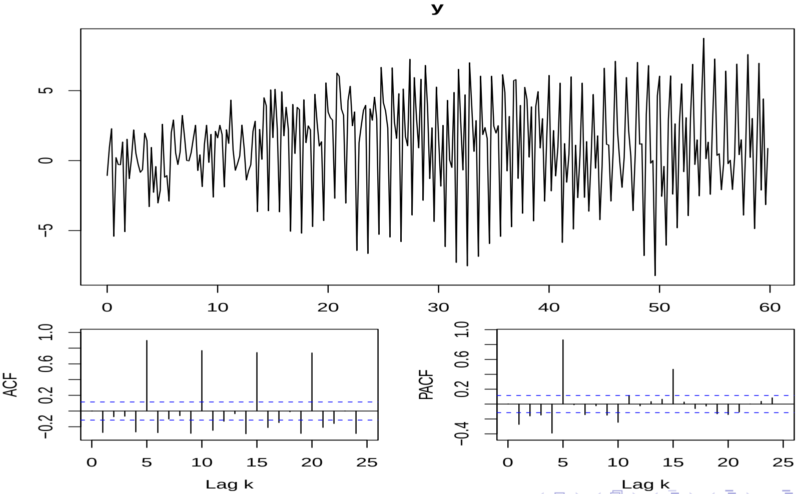


y
5
0
−5
0
50
100
150
200
250
300
ACF
1.0
0.6
0.2
−0.2
0
5
10
15
20
25
Lag k
PACF
1.0
0.5
0.0
−0.5
0
5
10
15
20
25
Lag k

Exemplo


y
10
15
20
25
30
35
40
45
0
50
100
150
200
250
300
ACF
0.0
0.4
0.8
0
5
10
15
20
25
Lag k
PACF
−0.5
0.5
1.0
0
5
10
15
20
25
Lag k

Exemplo


y
5
0
-5
0
10
20
30
40
50
60
ACF
-0.2
0.2
0.6
1.0
0
5
10
15
20
25
Lag k
PACF
-0.4
0.2
0.6
1.0
0
5
10
15
20
25
Lag k

Estimação

- O método de máxima verossimilhança tende a se comportar melhor do que os métodos: dos momentos e de mínimos quadrados condicionais.
- Tipos de verossimilhanças:
  - Exata: nesse caso, todas (ou o máximo possível) de observações são utilizadas (essencialmente é a que foi considerada no curso).
  - Condicional: as observações iniciais (relativas as ordens p e q) são ou substituídos por valores esperados, ou são assumidas conhecidas, através de escolhas convenientes.
  - Não-condicional: as observações iniciais (relativas as ordens p e q) são geradas através de algoritmos apropriados ("backforecasting" e/ou "backward").

Processos dos gráficos anteriores

- Slide 11: ARMA(1,2) - ST estacionária, em que ambas a FAC e a FACP decaem exponencialmente (equivalente a um processo AR(2)?).
- Slide 12: ARIMA(1,2) - ST não-estacionária, em que a FAC decai lentamente, apresentando valores grandes, enquanto que a FACP apresenta 3 valores significativos (flutuação amostral).
- Slide 13: $SARMA(3,1)_{s_5}$ - ST estacionária, em que as AC's são (mais) significativas em função da ordem da sazonalidade, tendo a FACP comportamento semelhante à FAC, mas com bem menos autocorrelações significativas.

Estimação

- Para os modelos ARIMA/SARIMA, em geral, as observações iniciais (de ordem d/D) não são consideradas, pois se trabalha com diferenças das observações.
- Para mais detalhes sobre como opera a função sarima do pacote astsa veja o respectivo manual (link).

Exemplo

- Considere uma ST de tamanho n do seguinte processo - AR(1): $Y_t = \phi y_{t-1} + \epsilon_t$, $\epsilon_t \sim NID(0, \sigma^2)$, com σ^2 conhecido e $y_0 \equiv 0$.
- Temos que:

$$
\begin{aligned}
L(\phi) &\propto \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=2}^{n}\left(y_t - \phi y_{t-1}\right)^2\right\} \\
\rightarrow l(\phi) &= const. + -\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=2}^{n}\left(y_t - \phi y_{t-1}\right)^2 \\
\rightarrow S(\phi) &= \frac{1}{\sigma^2}\left(\sum_{t=2}^{n} y_t y_{t-1} - \phi\sum_{t=2}^{n} y_{t-1}^2\right) \\
\rightarrow H(\phi) &= -\frac{1}{\sigma^2}\sum_{t=2}^{n} y_{t-1}^2
\end{aligned}
$$

Exemplo

- Portanto, temos que:

$$S(\widetilde{\phi}) = 0 \rightarrow \widetilde{\phi} = \frac{\sum_{t=2}^{n} y_t y_{t-1}}{\sum_{t=2}^{n} y_{t-1}^2}$$

- Por outro lado,

$$H(\widetilde{\phi}) = -\frac{1}{\sigma^2}\sum_{t=2}^{n} y_{t-1}^2 < 0.$$

Exemplo

- Logo, $\widehat{\phi} = \dfrac{\sum_{t=2}^{n} Y_t Y_{t-1}}{\sum_{t=2}^{n} Y_{t-1}^2}$ é o emv de ϕ.
- Note que a obtenção da distribuição exata (ou mesmo a esperança e variâncias exatas) é bastante complicado.
- Em geral, como mencionado, recorre-se à métodos assintóticos ou numéricos.

Diagnóstico

- O que usamos no curso (provavelmente, o mais usual) é o segundo resíduo padronizado visto aqui.
- Fizemos vários exemplos ao longo do curso.

Predição

- AR, MA e ARMA: expressões complicadas, porém dedutíveis, com base nos respectivos modelos.
- $SARMA(p,q)(P,Q)$: escreve-se como um modelo ARMA(p,q) com restrições nos parâmetros.
- $ARIMA(p,d,q)$: escreve-se em função dos modelos $ARMA(p,q)$.
- $SARIMA(p,d,q)(P,D,Q)$: escreve-se em função do modelo $SARMA(p,q)$ e, depois como um modelo ARMA(p,q) com restrições nos parâmetros.
- Fizemos vários exemplos ao longo do curso.

Modelagem

- Atender os objetivos do problema, respeitar a natureza dos dados e buscar modelos parcimoniosos (com ajuste minimamente adequado).
- Fizemos vários exemplos ao longo do curso.