Aula de Exercícios 2: Inferência Bayesiana - Prioris, Posteriores e Estimação Pontual e Intervalar

Prof. Caio Azevedo

Modelo $N(\mu, \sigma^2)$

- Seja $X_i|\boldsymbol{\theta} \overset{iid}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$, $\boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma^2)'$. Temos que:

$$L(\boldsymbol{\theta}) \propto (\sigma^2)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2\right\}$$

- Para σ^2 conhecido, temos que:

$$L(\mu) \propto \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left[(x_i - \overline{x}) + (\overline{x} - \mu)\right]^2\right\}$$

Modelo $N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 conhecido

- Cont.

$$L(\mu) \propto \exp\left\{-\frac{n}{2\sigma^2}(\mu - \overline{x})^2\right\},$$

que se assemelha ao núcleo de uma distribuição $N(\overline{x}, \sigma^2/n)$. Logo a família conjugada de prioris para a distribuição $N(\mu, \sigma^2)$ com σ^2 conhecido, é a distribuição $N(a, b)$.

- Posteriori

$$p(\mu|\boldsymbol{x}) \propto \exp\left\{-\frac{n}{2\sigma^2}(\mu - \overline{x})^2\right\} \exp\left\{-\frac{1}{2b}(\mu - a)^2\right\}$$

Modelo $N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 conhecido

- Posteriori (cont.)

$$
\begin{aligned}
p(\mu|\boldsymbol{x}) &\propto \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{n\mu^2}{\sigma^2} + \frac{\mu^2}{b} - 2\frac{\mu\overline{x}}{\sigma^2} - 2\frac{\mu a}{b}\right]\right\} \\
&\propto \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\mu^2\frac{nb+\sigma^2}{\sigma^2 b} - 2\mu\frac{\overline{x}b+\sigma^2 a}{\sigma^2 b}\right]\right\} \\
&\propto \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{nb+\sigma^2}{\sigma^2 b}\left[\mu^2 - 2\mu\frac{\overline{x}b+\sigma^2 a}{nb+\sigma^2}\right]\right\} \\
&= \exp\left\{-\frac{1}{2\psi}\left[\mu^2 - 2\mu\lambda\right]\right\} \propto \psi^{-1/2}\exp\left\{-\frac{1}{2\psi}(\mu-\lambda)^2\right\}
\end{aligned}
$$

que corresponde ao núcleo de uma distribuição $N(\lambda, \psi)$, em que $\lambda = \dfrac{\overline{x}b+\sigma^2 a}{nb+\sigma^2}$ e $\psi = \dfrac{\sigma^2 b}{nb+\sigma^2}$. Assim, $\mu|\boldsymbol{x} \sim N(\lambda, \psi)$

Modelo $N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 conhecido

- Com os resultados do slide anterior fica simples obter estimativas pontuais e intervalares.
- Preditiva: Temos que $X_{n+1}|\mu \sim N(\mu, \sigma^2)$ e $\mu|\boldsymbol{x} \sim N(\lambda, \psi)$.
- Logo, pelas propriedades descritas no slide 3 desse link, temos que $X_{n+1}|\boldsymbol{x} \sim N(\lambda, \sigma^2 + \psi)$.

Modelo $N(\mu, \sigma^2)$, com μ conhecido

- Temos que:

$$L(\boldsymbol{\theta}) \propto (\sigma^2)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right\}$$

que se assemelha ao núcleo de uma distribuição $IG(n/2-1, \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2/2)$. Assim, a família de prioris conjugada para o modelo $N(\mu, \sigma^2)$ com μ conhecido é a distribuição $IG(a, b)$.

- Posteriori:

$$\begin{aligned} p(\sigma^2|\boldsymbol{x}) &\propto (\sigma^2)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right\} \\ &\propto \left(\sigma^2\right)^{-a-1} \exp\left\{-\frac{b}{\sigma^2}\right\} \end{aligned}$$

Modelo $N(\mu, \sigma^2)$, com μ conhecido

- (cont.) Posteriori:

$$p(\sigma^2|\boldsymbol{x}) \quad \propto \quad (\sigma^2)^{-n/2-a-1} \exp\left\{-\frac{1}{\sigma^2}\left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2+b\right]\right\}$$

que se assemelha ao núcleo de uma distribuição $IG(a^*, b^*)$, em que $a^* = \frac{n}{2} + a$ e $b^* = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 + b$. Logo $\sigma^2|\boldsymbol{x} \sim IG(a^*, b^*)$

- Consequentemente, dado resultados anteriores, a obtenção de estimativas pontuais e intervalares fica fácil.
- Vamos provar agora que: $X_{n+1}|\boldsymbol{x} \sim t_{(2a^*)}\left(\mu, \sqrt{\frac{b^*}{a^*}}\right)$

Modelo $N(\mu, \sigma^2)$, com μ conhecido

- Preditiva:

$$
\begin{aligned}
p(x_{n+1} \equiv x|\boldsymbol{x}) &= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\sigma^2)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right\} \\
&\times \frac{(b^*)^{a^*}}{\Gamma(a^*)}(\sigma^2)^{-a^*-1} \exp\left\{-\frac{b^*}{\sigma^2}\right\} \mathbb{1}_{\mathcal{R}}(x) d\sigma^2 \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{(b^*)^{a^*}}{\Gamma(a^*)} \int_0^\infty \left(\sigma^2\right)^{a^*-1/2-1} \\
&\times \exp\left\{-\frac{1}{\sigma^2}\left[\frac{(x-\mu)^2}{2} + b^*\right]\right\} \mathbb{1}_{\mathcal{R}}(x) d\sigma^2 \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{(b^*)^{a^*}}{\Gamma(a^*)} \frac{\Gamma(a^*+1/2)}{\left[\frac{(x-\mu)^2}{2} + b^*\right]^{a^*+1/2}} \mathbb{1}_{\mathcal{R}}(x)
\end{aligned}
$$

Modelo $N(\mu, \sigma^2)$, com μ conhecido

- Preditiva (cont.), ($\nu = 2a^*$):

$$
\begin{aligned}
p(x_{n+1} \equiv x|\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{(b^*)^{a^*}}{\Gamma(a^*)} \frac{\Gamma(a^* + 1/2)}{\left[\frac{(x-\mu)^2}{2} + b^*\right]^{a^*+1/2}} \mathbb{1}_{\mathcal{R}}(x) \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\sqrt{2\pi a^*}\sqrt{b^*/a^*}} \frac{\mathbb{1}_{\mathcal{R}}(x)}{\left[\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{b^*/a^*}}\right)^2 \frac{1}{2a^*} + 1\right]^{\frac{2a^*+1}{2}}} \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\sqrt{\pi\nu}\sqrt{b^*/a^*}} \frac{\mathbb{1}_{\mathcal{R}}(x)}{\left[\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{b^*/a^*}}\right)^2 \frac{1}{\nu} + 1\right]^{\frac{\nu+1}{2}}}
\end{aligned}
$$

Exemplo (exponencial deslocada)

- Seja $X|\boldsymbol{\theta} \sim expD_{(\mu,\infty)}(\boldsymbol{\theta})$, em que $\boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma)'$ (exponencial deslocada à direita do zero, de parâmetros $\boldsymbol{\theta}$, em que $\mu \in \mathcal{R}$ e $\sigma \in \mathcal{R}^+$), então:

$$p(x|\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)}{\sigma}\right\} \mathbb{1}_{(\mu,\infty)}(x)$$

- Exercício: Se $Y = X - \mu$, então $Y|\sigma \sim \exp(\sigma)$. Logo:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(X|\boldsymbol{\theta}) &= \mathcal{E}(Y|\sigma) + \mu = \sigma + \mu \\ \mathcal{V}(X|\boldsymbol{\theta}) &= \mathcal{V}(Y|\sigma) = \sigma^2 \end{aligned}$$

Exemplo (exponencial deslocada)

- Verossimilhança

$$L(\boldsymbol{\theta}) = \sigma^{-n} \exp\left\{-\frac{n(\overline{x}-\mu)}{\sigma}\right\} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{(\mu,\infty)}(x_i),$$

mas, definindo $y_1 = \min\{x_1, ..., x_n\}$ e $y_n = \max\{x_1, ..., x_n\}$, temos que:

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{(\mu,\infty)}(x_i) = 1 \quad &\leftrightarrow \quad \mathbb{1}_{(\mu,\infty)}(y_1)\mathbb{1}_{(y_1,\infty)}(y_n) = 1 \\ &\leftrightarrow \quad \mathbb{1}_{(\mu,y_n)}(y_1)\mathbb{1}_{(\mu,\infty)}(y_n) = 1\end{aligned}$$

- Logo,

$$L(\boldsymbol{\theta}) \propto \sigma^{-n} \exp\left\{-\frac{n(\overline{x}-\mu)}{\sigma}\right\} \mathbb{1}_{(\mu,\infty)}(y_1)$$

μ conhecido

- Verossimilhança

$$L(\sigma) \propto \sigma^{-n} \exp\left\{-\frac{n(\overline{x}-\mu)}{\sigma}\right\}$$

que se assemelha ao núcleo de uma distribuição $IG(n+1, n(\overline{x}-\mu))$.

Assim, a $IG(a, b)$ é a família conjugada de prioris para o modelo $expD_{(\mu,\infty)}(\boldsymbol{\theta})$ com μ conhecido.

- Priori não informativa $p(\sigma) \propto \mathbb{1}_{\mathcal{R}^+}(\sigma)$.
- Priori de Jeffreys:

$$l(\sigma) = -n \ln \sigma - \frac{n(\overline{x}-\mu)}{\sigma} + c$$

μ conhecido

- (Cont.) Além disso:

$$\begin{aligned} S(\sigma) &= -\frac{n}{\sigma} + \frac{n(\overline{x} - \mu)}{\sigma^2} \\ H(\sigma) &= \frac{n}{\sigma^2} - 2\frac{n(\overline{x} - \mu)}{\sigma^3} \\ I(\sigma) &= -\frac{n}{\sigma^2} + 2\frac{n\sigma}{\sigma^3} = \frac{n}{\sigma^2} \end{aligned}$$

- Logo, $p^J(\sigma) \propto \sigma^{-1}\mathbb{1}_{\mathcal{R}^+}(\sigma)$

μ conhecido

- Priori conjugada (repetir os os desenvolvimentos a seguir para as outras duas prioris e comparar os resultados).

$$
\begin{aligned}
p(\sigma|\boldsymbol{x}) &\propto \sigma^{-n}\exp\left\{-\frac{n(\overline{x}-\mu)}{\sigma}\right\}\sigma^{-a-1}\exp\left\{-\frac{b}{\sigma}\right\}I_{\mathcal{R}^{+}}(\sigma) \\
&= \sigma^{-n-a-1}\exp\left\{-\frac{n(\overline{x}-\mu)+b}{\sigma}\right\}I_{\mathcal{R}^{+}}(\sigma)
\end{aligned}
$$

que corresponde ao núcleo de uma distribuição $IG(a^{*},b^{*})$, em que $a^{*}=n+a, b^{*}=n(\overline{x}-\mu)+b$.

μ conhecido

- O estimador de Bayes sobe perda quadrática é dado por $\widehat{\sigma}_{EAP}$, ou seja

$$\widehat{\sigma}_{EAP} = \frac{n(\overline{x} - \mu) + b}{n + a - 1}$$

- Além disso

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{\boldsymbol{X}|\sigma}(\widehat{\sigma}_{EAP}) &= \frac{n\sigma + b}{n + a - 1} \\
\mathcal{V}_{\boldsymbol{X}|\sigma}(\widehat{\sigma}_{EAP}) &= \frac{n\sigma^2}{(n + a - 1)^2} \\
\mathcal{B}_{\boldsymbol{X}|\sigma}(\widehat{\sigma}_{EAP}) &= \frac{b - \sigma(a - 1)}{n + a - 1}
\end{aligned}$$

μ conhecido

- Cont.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{EQM}_{\boldsymbol{X}|\sigma}(\widehat{\sigma}_{EAP}) &= \frac{n\sigma^2}{(n+a-1)^2} + \frac{(b-\sigma(a-1))^2}{(n+a-1)^2} \\
&= \frac{n\sigma^2 + b^2 - 2(a-1)b\sigma + \sigma^2(a-1)^2}{(n+a-1)^2} \\
&= \frac{\sigma^2(n+(a-1)^2) - 2(a-1)b\sigma + b^2}{(n+a-1)^2}
\end{aligned}
$$

- O estimador minimax para a perda quadrática é obtido quando o risco frequentista não depende de σ. Neste caso seria o $\mathcal{EQM}_{\boldsymbol{X}|\sigma}(\widehat{\sigma}_{EAP})$ não depender de σ.

μ conhecido

- Cont. Contudo, neste caso, não há estimador minimax pois, teríamos de escolher $(a-1)^2 = -n$ e $b = 0$, que não são valores permitidos para os hiperparâmetros.
- Vamos comparar os estimadores de MV com o EAP para um caso limite: $a = b \to 0$.
- (Exercício): Temos que $\widehat{\sigma}_{MV} = \overline{X} - \mu$. Assim, $\mathcal{E}_{\mathbf{X}|\sigma}(\widehat{\sigma}_{MV}) = \mu$, $\mathcal{B}_{\mathbf{X}|\sigma}(\widehat{\sigma}_{MV}) = 0$, $\mathcal{V}_{\mathbf{X}|\sigma}(\widehat{\sigma}_{MV}) = \mathcal{EQM}_{\mathbf{X}|\sigma}(\widehat{\sigma}_{MV}) = \dfrac{\sigma^2}{n}$.
- Note que, para $a = b \to 0$, temos que $\mathcal{EQM}_{\mathbf{X}|\sigma}(\widehat{\sigma}_{EAP}) = \dfrac{\sigma^2(n+1)}{(n-1)^2}$

μ conhecido

- Cont. Assim:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathcal{EQM}_{\boldsymbol{X}|\sigma}(\widehat{\sigma}_{MV})}{\mathcal{EQM}_{\boldsymbol{X}|\sigma}(\widehat{\sigma}_{EAP})} &= \frac{(n-1)^2}{n(n+1)} < 1 \leftrightarrow n^2 - 2n + 1 < n^2 + n \\
&\leftrightarrow -3n + 1 < 0 \leftrightarrow n > \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

- Assim, essencialmente, o estimador $\widehat{\sigma}_{MV}$ é uniformemente melhor (em relação à (n, σ^2, μ)), em comparação à $\widehat{\sigma}_{EAP}$.
- $IC_B(\sigma;\gamma) \equiv IC(\sigma;\gamma)$. Uma vez que $\sigma|\boldsymbol{x} \sim IG(a^*, b^*)$, então $\sigma^{-1}|\boldsymbol{x} \sim \text{gama}(a^*, (b^*)^{-1})$.
- Logo, se $\theta = 2b^*\sigma^{-1}$, então $\theta|\boldsymbol{x} \sim \chi^2_{(2a^*)}$

μ conhecido

- Portanto:

$$
\begin{aligned}
P\left(q_1 < 2b^*\sigma^{-1} < q_2|\boldsymbol{x}\right) &= \gamma \\
P\left(\frac{2b^*}{q_2} < \sigma < \frac{2b^*}{q_1}|\boldsymbol{x}\right) &= \gamma
\end{aligned}
$$

- Assim: $IC_B(\sigma,\gamma) = \left[\frac{2b^*}{q_2};\frac{2b^*}{q_1}\right]$, em que $P(X < q_1) = \frac{1-\gamma}{2}$, $P(X < q_2) = \frac{1+\gamma}{2}$, $X \sim \chi^2_{(2a^*)}$.

σ conhecido

- Temos que:

$$L(\mu) \propto \exp\left\{\frac{n\mu}{\sigma}\right\} \mathbb{1}_{(-\infty, y_1)}(\mu)$$

  que não corresponde ao núcleo de nenhuma distribuição conhecida ("to the best of my knowledge").

- Não é possível obter a informação de Fisher (priori de Jeffreys).
- Exercício: tente encontrar a família conjugada de prioris.

σ conhecido

- Vamos assumir: $p(\mu) \propto \mathbb{1}_{\mathcal{R}}(\mu)$, assim

$$
\begin{aligned}
p(\mu|\boldsymbol{x}) & \propto \exp\left\{\frac{n\mu}{\sigma}\right\}\mathbb{1}_{(-\infty,y_1)}(\mu)\mathbb{1}_{\mathcal{R}}(\mu) \\
& \propto \exp\left\{\frac{n\mu}{\sigma}\right\}\mathbb{1}_{(-\infty,y_1)}(\mu)
\end{aligned}
$$

- Obs: Logo que cheguei ao resultado acima, não me atentei que ele se assemelha ao núcleo de uma distribuição $expD_{(-\infty,y_1)}(y_1,\sigma/n)$. Dessa forma, procedi ao processo de obtenção da posteriori de forma usual.

σ conhecido

- Por outro lado, temos que:

$$p(\boldsymbol{x}) = \int_{-\infty}^{y_1} \exp\left\{\frac{n\mu}{\sigma}\right\} d\mu = \frac{\sigma}{n} \exp\left\{\frac{ny_1}{\sigma}\right\}$$

- Portanto

$$p(\mu|\boldsymbol{x}) = \frac{p(\boldsymbol{x}|\mu)p(\mu)}{p(\boldsymbol{x})} = \frac{\sigma}{n} \exp\left\{\frac{n(\mu - y_1)}{\sigma}\right\} \mathbb{1}_{(-\infty,y_1)}(\mu)$$

- Por outro lado, se $\mu^* = -(\mu - y_1)$, então $\mu^*|\boldsymbol{x} \sim exp(\sigma/n)$. Assim

$$\begin{aligned} \widehat{\mu}_{EAP} = \mathcal{E}(\mu|\boldsymbol{x}) &= y_1 - \frac{\sigma}{n} \\ \mathcal{V}(\mu|\boldsymbol{x}) &= \frac{\sigma^2}{n^2} \end{aligned}$$

σ conhecido

- Além disso, é possível provar que $\widehat{\mu}_{MV} = Y_1$ é o estimador de MV de μ.
- (exercício) Por outro lado, temos que $S_{Y_1}(y_1|\mu) = (S_X(y_1|\mu))^n$, em que $S_X(x|\mu) = e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}}$ é a fds (função de sobrevivência) de $X|\mu \sim expD_{(\mu,\infty)}(\mu)$.
- Logo $S_{Y_1}(y_1|\mu) = e^{-\frac{y_1-\mu}{\sigma/n}} \to f_{Y_1}(y_1|\mu) = \frac{n}{\sigma}\exp\left\{-\frac{y_1-\mu}{\sigma/n}\right\}\mathbb{1}_{(\mu,\infty)}(y_1)$. Portanto, $Y_1|\mu \sim expD_{(\mu,\infty)}(\mu)$, com σ^2 conhecido. Dessa forma:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_{\boldsymbol{X}|\mu}(Y_1) &= \frac{\sigma}{n} + \mu \\
\mathcal{V}_{\boldsymbol{X}|\mu}(Y_1) &= \frac{\sigma^2}{n^2}
\end{aligned}
$$

σ conhecido

- Assim:
  - $\widehat{\mu}_{MV} = Y_1$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_{\boldsymbol{X}|\mu}(\widehat{\mu}_{MV}) &= \frac{\sigma}{n} + \mu; \mathcal{B}_{\boldsymbol{X}|\mu}(\widehat{\mu}_{MV}) = \frac{\sigma}{n} \\
\mathcal{V}_{\boldsymbol{X}|\mu}(\widehat{\mu}_{MV}) &= \frac{\sigma^2}{n^2}; \mathcal{EQM}_{\boldsymbol{X}|\mu}(\widehat{\mu}_{MV}) = \frac{2\sigma^2}{n^2}
\end{aligned}
$$

  - $\widehat{\mu}_{EAP} = Y_1 - \dfrac{\sigma}{n}$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_{\boldsymbol{X}|\mu}(\widehat{\mu}_{EAP}) &= \mu; \mathcal{B}_{\boldsymbol{X}|\mu}(\widehat{\mu}_{EAP}) = 0 \\
\mathcal{V}_{\boldsymbol{X}|\mu}(\widehat{\mu}_{EAP}) &= \frac{\sigma^2}{n^2}; \mathcal{EQM}_{\boldsymbol{X}|\mu}(\widehat{\mu}_{EAP}) = \frac{\sigma^2}{n^2}
\end{aligned}
$$

σ conhecido

- Como o emv é viciado é o estimador EAP não o é, vamos comparar os EQM's dos dois estimadores, ou seja:

$$\frac{\mathcal{EQM}_{\boldsymbol{X}|\mu}(\widehat{\mu}_{MV})}{\mathcal{EQM}_{\boldsymbol{X}|\mu}(\widehat{\mu}_{EAP})} = 2 > 1$$

- Assim, o estimador EAP é uniformemente melhor (em termos de $n, \mu\sigma$) do que o estimador de mv.
- Além disso, como o risco frequentista da EAP (que neste caso é o EQM, que coincide com a Var) não depende de μ, ele também é um estimador minimax. Também, ele é o ENVVUM.

σ conhecido

- Para obter um $IC_B(\mu;\gamma)$, lembremos que $\mu^*|\boldsymbol{x} \sim \exp(\sigma/n)$. Assim:

$$P\left(q_1 \leq \mu^* \leq q_2|\boldsymbol{x}\right) = \gamma \leftrightarrow P\left(y_1 - q_2 \leq \mu \leq y_1 - q_1|\boldsymbol{x}\right) = \gamma$$

- em que $F_X(q_1) = 1 - \exp\left\{-\frac{q_1}{\sigma/n}\right\} = \frac{1-\gamma}{2}$ e $S_X(q_2) = \exp\left\{-\frac{q_2}{\sigma/n}\right\} = \frac{1-\gamma}{2}$, em que $X|\mu \sim \exp(\sigma/n)$. Ou seja, $q_1 = -\frac{\sigma}{n}\ln\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)$ e $q_2 = -\frac{\sigma}{n}\ln\left(\frac{1-\gamma}{2}\right)$.
- Logo $IC_B(\mu;\gamma) = [y_1 - q_2; y_1 - q_1]$

θ desconhecido

- Vamos assumir uma priori não informativa (imprópria), ou seja $p(\boldsymbol{\theta}) \propto \mathbb{1}_{\mathcal{R}}(\mu)\mathbb{1}_{\mathcal{R}^+}(\sigma)$
- Logo,

$$
\begin{aligned}
p(\boldsymbol{\theta}) &\propto \sigma^{-n} \exp\left\{-\frac{n(\overline{x}-\mu)}{\sigma}\right\} \mathbb{1}_{\mathcal{R}}(\mu)\mathbb{1}_{(-\infty,y_1)}(\mu)\mathbb{1}_{\mathcal{R}^+}(\sigma) \\
&= \sigma^{-n} \exp\left\{-\frac{n(\overline{x}-\mu)}{\sigma}\right\} \mathbb{1}_{(-\infty,y_1)}(\mu)\mathbb{1}_{\mathcal{R}^+}(\sigma)
\end{aligned}
$$

- A qual não corresponde ao núcleo de nenhuma distribuição bivariada conhecida ("to the best of my knowledge").

θ desconhecido

- Por outro lado, temos que:

$$p(\mu|\boldsymbol{x}) \propto \mathbb{1}_{(-\infty,y_1)}(\mu) \underbrace{\int_0^{\infty} \sigma^{-n} \exp\left\{-\frac{n(\overline{x}-\mu)}{\sigma}\right\} d\sigma}_{IG(n-1,n(\overline{x}-\mu))}$$

$$= \frac{\Gamma(n-1)}{[n(\overline{x}-\mu)]^{n-1}} \mathbb{1}_{(-\infty,y_1)}(\mu)$$

- A qual não corresponde ao núcleo de nenhuma distribuição univariada conhecida ("to the best of my knowledge").
- Contudo, as contas necessárias (encontrar a constante de normalização e obter estimativas pontuais e intervalares) são simples, por se tratar de um polinômio (exercício).

θ desconhecido

- Para σ, temos que:

$$
\begin{aligned}
p(\sigma|\boldsymbol{x}) &\propto \sigma^{-n} \exp\left\{-\frac{n\overline{x}}{\sigma}\right\} \mathbb{1}_{\mathcal{R}^+}(\sigma) \int_{-\infty}^{y_1} \exp\left\{\frac{n\mu}{\sigma}\right\} d\mu \\
&\propto \sigma^{-n-1} \exp\left\{-\frac{n\left(\overline{x}-y_1\right)}{\sigma}\right\} \mathbb{1}_{\mathcal{R}^+}(\sigma)
\end{aligned}
$$

que corresponde ao núcleo de uma distribuição $IG(n, n(\overline{x}-y_1))$.

- Logo, a obtenção de estimativas pontuais e intervalares seguem abordagens já apresentadas.
- Obs: Não é possível obter a priori de Jeffreys.