# Processos autoregressivos (parte 1)

Prof. Caio Azevedo

# Introdução

- Uma classes de modelos para ST (estacionários, sob algumas condições) mais importantes é a de modelos autoregressivos (de ordem $p$, $p \in \{1, 2, ...\}$).
- Um modelo é dito ser autoregressivo de ordem $p$ se para qualquer $t$, $Y_t$ é a variável resposta e as "covariáveis" $Y_{t-1}, \ldots, Y_{t-p}$ (note que as covariáveis também são variáveis aleatórias), diferentemente do que fora visto em Regressão.

# Características

- Mais especificamente, temos que:

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \cdots + \phi_p Y_{t-p} + \epsilon_t, \ \epsilon_t \sim RB(0, \sigma^2)$$

$$Y_t - \phi_1 Y_{t-1} - \cdots - \phi_p Y_{t-p} = \epsilon_t$$

$$Y_t - \phi_1 B Y_t - \cdots - \phi_p B^p Y_t = \epsilon_t$$

$$\phi(B) y_t = \epsilon_t,$$

em que $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \cdots - \phi_p B^p$.

- Dizemos que um processo $AR(p)$ é estacionário se e somente se as raízes de $\phi(z) = 1 - \phi z - \cdots - \phi_p z^p$ estão fora do círculo unitário. Ou seja, se a solução de $\phi(z) = 0$ satisfaz $|z| \neq 1$.

# Características

- Dizemos que um processo qualquer é causal se a observação atual $Y_t$ depender apenas de erros (choques/ruídos) presentes e passados $(\epsilon_t, \epsilon_{t-1}, \ldots)$, mas não de futuros. Consequentemente processos MA($\infty$) são causais o que leva à:

$$
\begin{aligned}
Cov(Y_t, \epsilon_{t+k}) &= Cov\left(\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \epsilon_{t-j}, \epsilon_{t+k}\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j Cov\left(\epsilon_{t-j}, \epsilon_{t+k}\right) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \gamma_{k+j} = 0.
\end{aligned}
$$

- Um processo $AR(p)$ é causal se e somente se a solução de $\phi(z) = 0$ satisfaz$|z| > 1$.

# AR(1)

- Por enquanto, discutiremos dois casos particulares do $AR(p)$, o $AR(1)$ e $AR(2)$, que servirão, entre outros objetivos, para ilustrar algumas propriedades. Primeiro estudaremos o modelo AR(1).
- Um processo $\{Y_t\}$ é dito ser $AR(1)$ se satisfaz:

$$Y_t = \phi Y_{t-1} + \epsilon_t$$

- Note que ele pode ser escrito como $\phi(B)Y_t = \epsilon_t$ com $\phi(B) = 1 - \phi B$.

# AR(1) - características

- O processo AR(1) tem solução estacionária se e somente se:

$$\phi(z) = 1 - \phi z = 0 \Longrightarrow z = \frac{1}{\phi} \Longleftrightarrow |z| = \frac{1}{|\phi|} \neq 1 \Longleftrightarrow |\phi| \neq 1. \quad (1)$$

- De (1) temos que o processo é causal se $|\phi| < 1$. Neste caso, já foi demonstrado que se $|\phi| < 1$ então $\{Y_t\}$ pode ser escrito como um MA($\infty$), em que $Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \epsilon_{t-j}$ e, portanto, é causal.

# AR(1) - características

- Podemos demonstrar que se $|\phi| > 1$ o processo $AR(1)$ não é causal, notando que:

$$
\begin{aligned}
Y_{t+1} &= \phi Y_t + \epsilon_{t+1}, \\
Y_t &= \phi^{-1} Y_{t+1} - \phi^{-1}\epsilon_{t+1} = \phi^{-1}(\phi^{-1} Y_{t+2} - \phi^{-1}\epsilon_{t+2}) - \phi^{-1}\epsilon_{t+1} \\
&= \phi^{-2} Y_{t+2} - \phi^{-2}\epsilon_{t+2} - \phi^{-1}\epsilon_{t+1},
\end{aligned}
$$

- Por indução, podemos provar que ($Y_t$ depende de erros futuros):

$$Y_t = \phi^{-k} Y_{t+k} - \sum_{i=1}^{k} \phi^{-i}\epsilon_{t+i}.$$

# AR(1) - características

- Note que se $|\phi| > 1$, então:

$$
\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} Y_t &= \lim_{k\to\infty} \phi^{-k} Y_{t+k} - \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \phi^{-i} \epsilon_{t+i}, \\
Y_t &= -\sum_{i=1}^{\infty} \phi^{-i} \epsilon_{t+i},
\end{aligned}
$$

e portanto $\{Y_t\}$ não é causal.

# AR(1) - exemplos

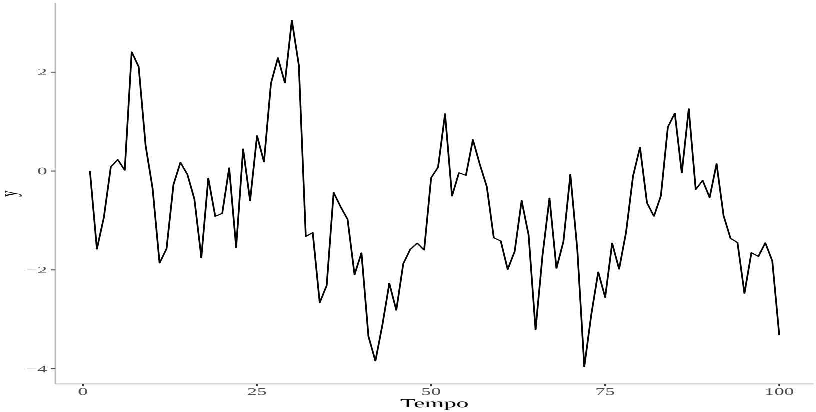


Figura: Série simulada de um processo AR(1) com $\phi = 0.7$ e considerando um ruído branco $N(0, 1)$.

# AR(1) - exemplos

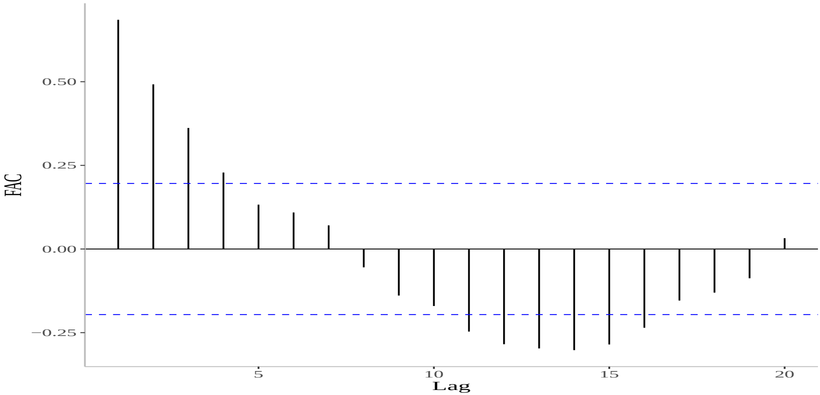


Figura: FAC para a série simulada de um processo AR(1) com $\phi = 0,7$ e considerando um ruído branco $N(0,1)$.

# AR(1) - exemplos

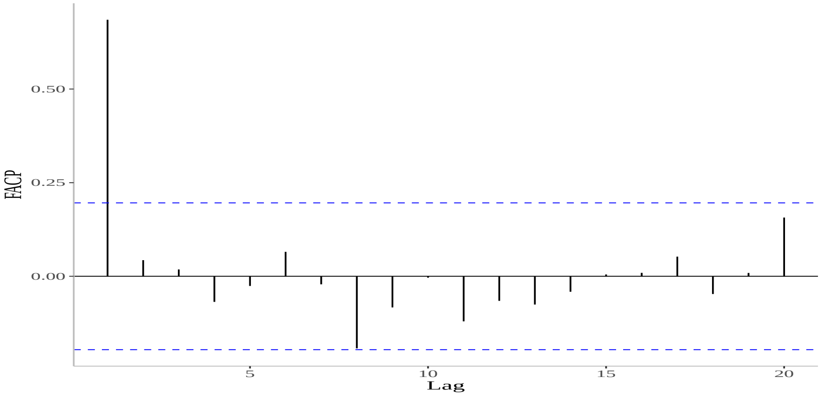


Figura: FACP para a série simulada de um processo AR(1) com $\phi = 0,7$ e considerando um ruído branco $N(0,1)$.

# AR(1) - exemplos

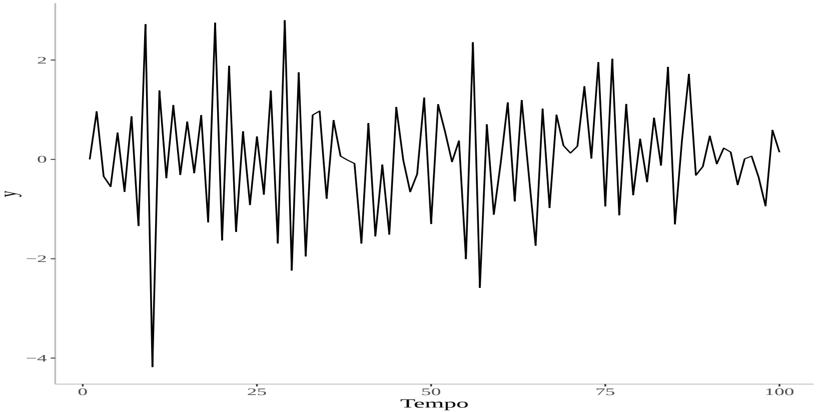


Figura: Série simulada de um processo AR(1) com $\phi = -0.7$ e considerando um ruído branco $N(0, 1)$.

# AR(1) - exemplos

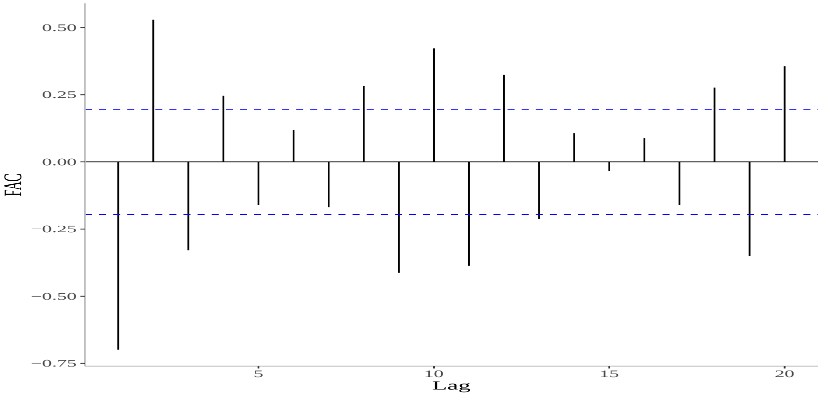


Figura: FAC para a série simulada de um processo AR(1) com $\phi = -0.7$ e considerando um ruído branco $N(0,1)$.

# AR(1) - exemplos

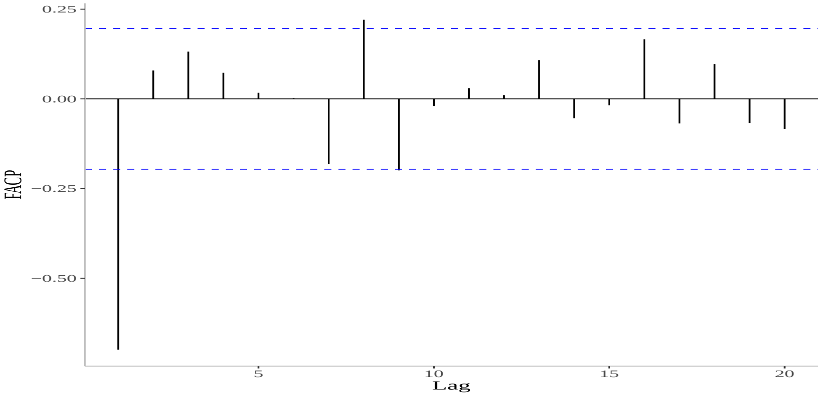


Figura: FACP para a série simulada de um processo AR(1) com $\phi = -0.7$ e considerando um ruído branco $N(0, 1)$.

# AR(1) - exemplos

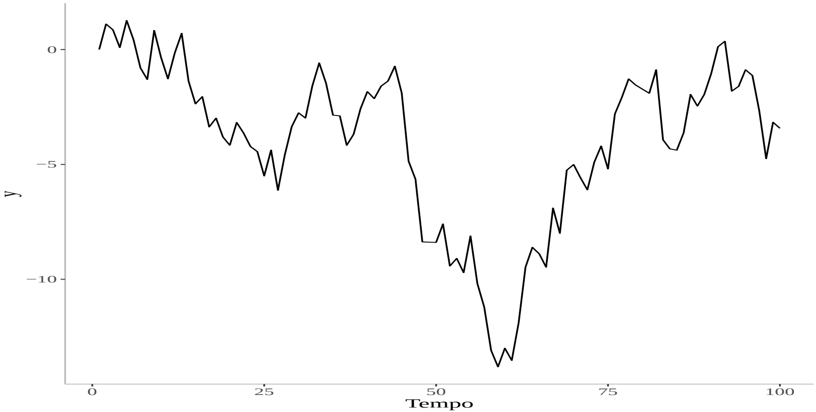


Figura: Série simulada de um processo AR(1) com $\phi = 1,01$ e considerando um ruído branco $N(0,1)$.

# AR(1) - exemplos

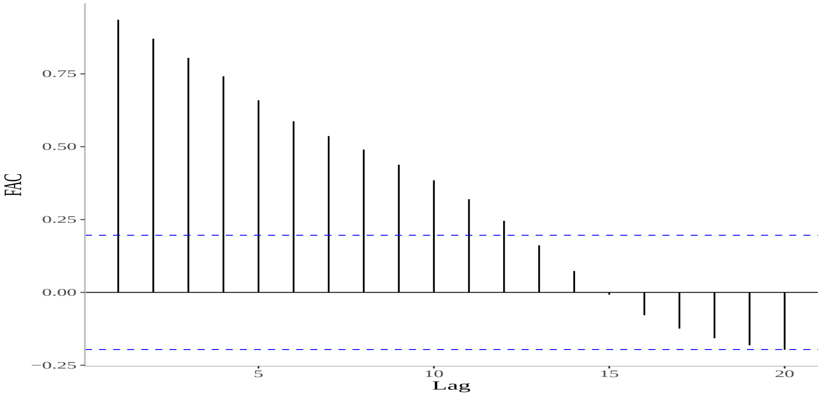


Figura: FAC para a série simulada de um processo AR(1) com $\phi = 1,01$ e considerando um ruído branco $N(0,1)$.

# AR(1) - exemplos

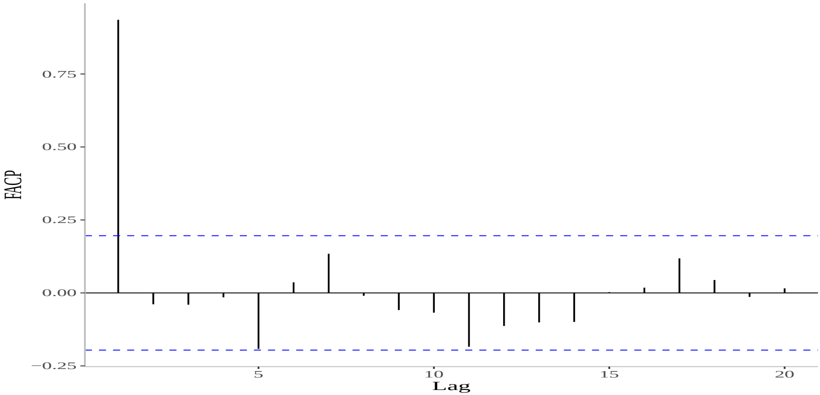


Figura: FACP para a série simulada de um processo AR(1) com $\phi = 1,01$ e considerando um ruído branco $N(0, 1)$.

# AR(1) - outras propriedades

- Dizemos que o processo $\{Y_t\}$ é AR(1) com média $\mu$, se o processo $\{Y_t - \mu\}$ fpr um processo AR(1).
- $\{Y_t\}$ é um processo AR(1) com *drift* se ele é tal que:

$$Y_t = \delta + \phi Y_{t-1} + \epsilon_t,$$

em que $\delta$ é uma constante e $|\phi| < 1$.

- A seguir, demonstraremos que o processo AR(1) com drift é estacionário.

# AR(1) com drift

- Note que

$$
\begin{aligned}
Y_t &= \delta + \phi Y_{t-1} + \epsilon_t, \\
Y_t - \phi Y_{t-1} &= \delta + \epsilon_t, \\
\phi(B) Y_t &= \delta + \epsilon_t, \\
Y_t &= \frac{1}{\phi(B)}\delta + \frac{1}{\phi(B)}\epsilon_t,
\end{aligned}
$$

em que $\phi(B) = 1 - \phi B$.

# AR(1) com drift

- Como $\delta$ é constante, por definição $\delta B = \delta$, logo,

$$
\begin{aligned}
Y_t &= \delta \sum_{i=0}^{\infty} \phi^i + \sum_{i=0}^{\infty} \phi^i \epsilon_{t-i}, \\
Y_t &= \frac{\delta}{1-\phi} + \sum_{i=0}^{\infty} \phi^i \epsilon_{t-i}.
\end{aligned}
$$

Portanto $E(Y_t) = \dfrac{\delta}{1-\phi}$ e como a função de autocovariância é invariante por adição de constantes ao processo (provar), então a FAC do $AR(1)$ com drift é a mesma do $AR(1)$.