Variáveis Aleatórias Contínuas: Introdução

Exemplo

Dada a função

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 0 \\ 2e^{-2x} & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

(a) Mostre que esta é uma legítima f.d.p.

(b) Calcule a probabilidade de $X > 10$.

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 166.

Variáveis Aleatórias Contínuas: Introdução

(a) Uma função densidade de probabilidade deve satisfazer as seguintes propriedades:

(i) $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Note que e^{-x} é positiva para qualquer x, e consequentemente o é $2e^{-2x}$. Resta mostrar que sua integral é 1. Mas sabemos a antiderivada de $2e^{-2x}$, ou seja:

$$\int 2e^{-2x}dx = -e^{-2x}$$

Variáveis Aleatórias Contínuas: Introdução

(a) (cont.) Note que a função está definida nesta forma para $x \geq 0$; para $x < 0$, ela é 0. Então a integral é

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{\infty} 2e^{-2x}dx =$$

$$= \left[-e^{-2x}\right]_0^{\infty} = \lim_{x\to\infty} -e^{-2x} - \left(-e^{-0}\right) = 1$$

(b) A probabilidade é dada por:

$$P(X > 10) = \int_{10}^{\infty} 2e^{-2x}dx = \lim_{x\to\infty} -e^{-2x} - \left(-e^{-2\times 10}\right) = \frac{1}{e^{20}}$$

Variáveis Aleatórias Contínuas: Introdução

Exemplo

Uma variável aleatória X tem distribuição triangular no intervalo $[0, 1]$ se sua f.d.p. for dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 0 \\ Cx & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 1/2 \\ C(1-x) & \text{se} \quad 1/2 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

(a) Determine o valor de C para que f(.) seja, de fato uma legítima fdp.

(b) Esboce o gráfico de $f(x)$.

(c) Determine $P(X \leq 1/2)$, $P(X > 1/2)$ e $P(1/4 \leq X \leq 3/4)$.

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 166.

(a) Devemos escolher C de modo que $f(x)$ satisfaça

(i) $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Por (i), temos que $C > 0$. Agora, para que C satisfaça (ii), devemos integrar $f(x)$:

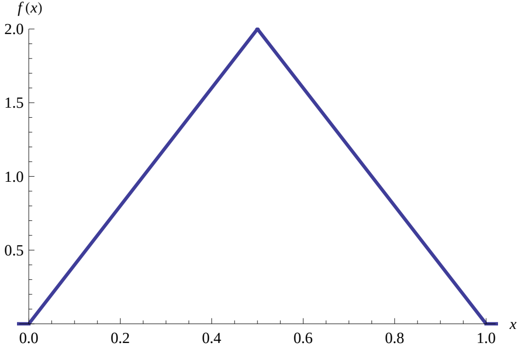
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{1/2} Cxdx + \int_{1/2}^{1} C(1-x)dx + \int_{1}^{\infty} 0dx$$

$$= C\int_{0}^{1/2} xdx + C\int_{1/2}^{1}(1-x)dx = C\left(\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{1/2} + \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_{1/2}^{1}\right)$$

$$= C\left(\frac{1}{8} + 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\right) = C \times \frac{1}{4} \Rightarrow C \text{ deve ser igual a } 4.$$

Variáveis Aleatórias Contínuas: Introdução

(b) O gráfico de $f(x)$ é dado por:



(c) Para encontrarmos as probabilidades dos eventos, basta integrar nas regiões correspondentes:

$$P(X \leq 1/2) = \int_0^{1/2} f(x)dx = \int_0^{1/2} 4xdx = 1/2$$

Note que $P(X > 1/2) = 1 - P(X \leq 1/2) = 1 - 1/2 = 1/2$.

$$P(1/4 \leq X \leq 3/4) = \int_{1/4}^{3/4} f(x)dx$$

$$= \int_{1/4}^{1/2} 4xdx + \int_{1/2}^{3/4} 4(1-x)dx = \frac{3}{4}$$

Variáveis Aleatórias Contínuas: Introdução

Exemplo

Calcule a esperança, a variância e a f.d.a. da variável aleatória X com a densidade triangular em $[0, 1]$ (veja pÃ¡gina 4).
Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 171.

Variáveis Aleatórias Contínuas: Introdução

Basta aplicar as definições de valor esperado e variância:

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^{1/2} 4x^2 dx + \int_{1/2}^{1} 4x(1-x)dx$$

$$= \left[\frac{4x^3}{3}\right]_0^{1/2} + \left[\frac{2}{3}x^2(3-2x)\right]_{1/2}^{1} = \frac{1}{2}$$

Variáveis Aleatórias Contínuas: Introdução

$$\text{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbb{E}(X))^2 f(x) dx =$$

$$\int_0^{1/2} 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 x dx + \int_{1/2}^{1} 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 (1-x) dx =$$

$$\left[x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_0^{1/2} + \left[-x^4 + \frac{8}{3}^3 - \frac{5}{2}x^2 + x\right]_{1/2}^{1} = \frac{1}{24}$$

Variáveis Aleatórias Contínuas: Introdução

A função de distribuição acumulada de uma variável aleatória contínua é dada por

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Temos que para $x \in [0, 1/2)$, $F(x)$ é dada por

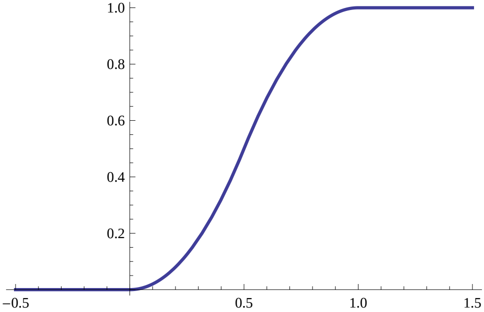
$$F(x) = \int_{0}^{x} 4tdt = 2x^2$$

Para $x \in [1/2, 1]$, a fda é dada por

$$F(x) = \int_{0}^{1/2} 4tdt + \int_{1/2}^{x} = 4(1-t)dt = -2x^2 + 4x - 1$$

Variáveis Aleatórias Contínuas: Introdução

Para valores de $x \geq 1$, a acumulada assume valor 1. O gráfico de $F(x)$ é dado por:



Variáveis Aleatórias Contínuas: Introdução

Exemplo

O tempo médio que um consumidor gasta no supermercado é de 25 minutos. Então qual é a probabilidade que um consumidor gaste mais de trinta minutos no supermercado?
Fonte: Ribeiro, André L. P., notas de aula.

Variáveis Aleatórias Contínuas: Introdução

Quando desejamos modelar o tempo de espera entre dois fenômenos que assumimos independentes (por exemplo, "o cliente chega" e "o cliente vai embora"), é possível mostrar, sob algumas condições de regularidade, que a distribuição exponencial é a apropriada para tal fim. Sendo assim, temos que $X \sim exp(\lambda)$, e como $25 = \mathbb{E}(X) = 1/\lambda$, então $\lambda = 1/25$. Logo

$$P(X > 30) = 1 - P(X \leq 30) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{30}{25}}\right) = 0,3013$$

Distribuição Uniforme, exemplo I

Exemplo

Dada a v.a. X, uniforme em $(5, 10)$, calcule as probabilidades abaixo:

(a) $P(X < 7)$

(b) $P(8 < X < 9)$

(c) $P(X > 8{,}5)$

(d) $P(|X - 7{,}5| > 2)$

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 195.

Distribuição Uniforme, exemplo I

Note que a densidade de X é $f(x) = 1/(10-5)$ se $x \in (5, 10)$ e 0 caso contrário. Assim, basta integrar a fdp na região dos eventos, isto é:

(a) $P(X < 7) = \int_5^7 \frac{1}{5} dx = \frac{7}{5} - \frac{5}{5} = \frac{2}{5}.$

(b) $P(8 < X < 9) = \int_8^9 \frac{1}{5} dx = \frac{9}{5} - \frac{8}{5} = \frac{1}{5}.$

Distribuição Uniforme, exemplo I

(c) $P(X > 8{,}5) = \int_{8{,}5}^{10} \frac{1}{5} dx = \frac{10}{5} - \frac{17}{10} = \frac{3}{10}.$

(d) $P(|X - 7{,}5| > 2) = P(X > 9{,}5 \text{ ou } X < 5{,}5) =.$

$$\int_{9{,}5}^{10} \frac{1}{5} dx + \int_{5}^{5{,}5} \frac{1}{5} dx = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{1}{5}$$

Distribuição Normal, exemplo I

Exemplo

Dao que $X \sim N(10, 4)$, calcule:

(a) $P(8 < X < 10)$

(b) $P(9 \leq X \leq 12)$

(c) $P(X > 10)$

(d) $P(X < 8 \text{ ou } X > 11)$

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 182.

Distribuição Normal, exemplo I

Para calcular as probabilidades, é necessário integração numérica – e^{-x^2} não tem antiderivada. Contudo, os valores para $Z \sim N(0,1)$ encontram-se tabelados. Recomenda-se utilizar a tabela disponível na página do curso. Tudo o que precisamos fazer é transformar a variável em questão numa distribuição $N(0,1)$.

Recorde que se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, então $X - \mu \sim N(0, \sigma^2)$ e $(X - \mu)/\sigma \sim N(0,1)$. Neste problema, sabemos que $\mu = 10$ e $\sigma^2 = 4$, logo $\sigma = 2$. Então $(X - 10)/2 \sim N(0,1)$.

Distribuição Normal, exemplo I

(a) Devemos transformar X de modo que o evento $8 < X < 10$ permaneça inalterado. Fazemos isso transformando todos os lados da inequação:

$8 < X < 10 \Leftrightarrow 8-10 < X-10 < 10-10 \Leftrightarrow -2 < X-10 < 0$
$\Leftrightarrow -2/2 < (X-10)/2 < 0/2 \Leftrightarrow -1 < Z < 0.$

O valor $\Phi(0)$ está disponível na tabela, e é igual a 0,5. Para obtermos $\Phi(-1)$, podemos usar a simetria da função Φ em torno do zero, isto é, $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$. A tabela nos fornece $\Phi(1) = 0{,}8413$, de onde deduzimos que $\Phi(-1) = 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587$. Concluimos portanto que

$$P(8 < X < 10) = P(-1 < Z < 0) = \Phi(0) - \Phi(-1) = 0{,}3413$$

Distribuição Normal, exemplo I

Essa é a tabela da normal, com os valores de $\Phi(1)$ e $\Phi(0)$ destacados:

Tabela distribuição acumulada da Normal padrão

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt, \;\; Z \sim N(0,1)$$

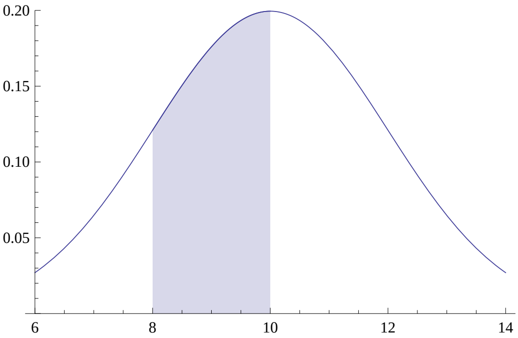
Turmas coordenadas ME203, ME180, ME480 e ME414

UNICAMP, 1º semestre 2010

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015

Distribuição Normal, exemplo I

Esse é o gráfico da curva N(10,4), com a região $(8, 10]$ correspondente ao item (a) em destaque:



Distribuição Normal, exemplo I

(b) $P(9 \leq X \leq 12) = P(9 - 10 \leq X - 10 \leq 12 - 10) =$
$P(-1/2 \leq Z \leq 1) = 0{,}5328$

(c) $P(X > 10) = P(Z > 0) = 0{,}5$

(d) $P(X < 8 \text{ ou } X > 11) = P(X < 8) + P(X > 11)$, pois
$\{X < 8\} \cap \{X > 11\} = \emptyset$.

$P(X < 8) = P(Z < -1) = 0{,}1587$ e
$P(X > 11) = P(Z > 1/2) = 0{,}3085$, logo
$P(X < 8 \text{ ou } X > 11) = 0{,}4672$

Distribuição Exponencial, exemplo I

Exemplo

Suponha que um mecanismo eletrônico seja tal que seu tempo de vida, X (em 1.000 horas), possa ser modelado segundo uma v.a. contínua com f.d.p. $f(x) = e^{-x}$, $x > 0$. Suponha que o custo de fabricação de um item seja 2,00 reais e o preço de venda seja 5,00 reais. O fabricante garante total devolução se $X \leq 0{,}9$. Qual o lucro esperado por item?

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 183.

Distribuição Exponencial, exemplo I

A probabilidade do item durar menos que 900 horas é dada por

$$P(X < 0{,}9) = \int_0^{0{,}9} e^{-x}dx = 0{,}5934.$$

Temos portanto que o item será devolvido com essa probabilidade (implicando numa perda de \$2), ou permanecerá com o cliente (implicando num ganho de $\$5 - \$2 = \$3$). Segue que portanto o lucro líquido é de $-2 \times 0{,}5934 + 3 \times 0{,}4066 = \$0{,}033$, ou aproximadamente três centavos de lucro por item.

Distribuição Uniforme, exemplo II

Exemplo

Seja X uma variável aleatória distribuida uniformemente, com média 15 e variância $25/3$.

(a) Encontre a densidade de X.

(b) Qual é a probabilidade de que $X > 14$?

Fonte: Ribeiro, André L. P., notas de aula.

Distribuição Uniforme, exemplo II

(a) Lembre-se que a esperança de uma v.a. uniforme no intervalo $[a, b]$ é dada por

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}.$$

e sua variância por

$$\text{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Distribuição Uniforme, exemplo II

(a) (cont.) Temos, portanto, o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \frac{a+b}{2} & = & 15 \\ \frac{(b-a)^2}{12} & = & \frac{25}{3} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a+b & = & 30 \\ (b-a)^2 & = & 100 \end{cases}$$

Ou simplesmente

$$\begin{cases} a & + & b & = & 30 \\ b & - & a & = & 10 \end{cases}$$

O sistema tem solução dada por $a = 10$, $b = 20$, o que nos mostra que $X \sim U[10, 20]$ e $f(x) = \dfrac{1}{10}$ se $x \in [10, 20]$ e 0 caso contrário.

Distribuição Uniforme, exemplo II

(b) A probabilidade de que $X > 14$ é dada por

$$P(X > 14) = \int_{14}^{20} \frac{1}{10} dx = \frac{(20 - 14)}{10} = 0,6$$

Distribuição Exponencial, exemplo II

Exemplo

O tempo de vida X, em horas, de um componente eletrônico segue uma distribuição exponencial de tal forma que $P(X \leq 1000) = 0,75$. Qual é o tempo médio de vida do componente?

Fonte: Ribeiro, André L. P., notas de aula.

Distribuição Exponencial, exemplo II

Sabemos que se $X \sim exp(\lambda)$, então $F(x) = P(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}$ e $\mathbb{E}(X) = \lambda^{-1}$. Basta então observarmos que

$$P(X \leq 1000) = 1 - e^{-\lambda 1000} = 0,75 \Leftrightarrow \lambda = \frac{\ln(4)}{1000} = 0,0013863$$

Concluímos então que o tempo médio de vida, $\mathbb{E}(X)$, é igual a $1/0,0013863 = 721,3475$ horas, e que 75% dos componentes duram 1000 horas ou menos.

Distribuição Normal, exemplo II

Exemplo

Suponha que as amplitudes de vida de dois aparelhos elétricos, D_1 e D_2, tenham distribuições $N(42, 36)$ e $N(45, 9)$, respectivamente. Se os aparelhos são feitos para ser usados por um período de 45 horas, qual aparelho deve ser preferido? E se for por um período de 49 horas?

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 183.

Distribuição Normal, exemplo II

(i) Para o caso de períodos de 45 horas, temos $P(D_1 > 45) = P(Z > [45 - 42]/6) = P(Z > 0.5) = 0{,}3085$, enquanto $P(D_2 > 45) = P(Z > [45 - 45]/3)$ $= P(Z > 0) = 0{,}5$. Note que a probabilidade do segundo aparelho durar mais que 45 horas é maior que a do primeiro e, portanto, ele é preferível.

(ii) Analogamente, $P(D_1 > 49) = P(Z > [49 - 42]/6) = P(Z > 1,1666) = 0{,}1210$, e $P(D_2 > 49) = P(Z > [49 - 45]/3) = P(Z > 1,3333) = 0{,}0912$. Neste cenário, é preferível o primeiro aparelho.

Distribuição Normal, exemplo III

Exemplo

Assumindo que X possui distribuição $N(\mu, \sigma^2)$, calcule:

(a) $P(X \leq \mu + 2\sigma)$

(b) $P(|X - \mu| \leq \sigma)$

(c) O número a tal que $P(\mu - a\sigma \leq X \leq \mu + a\sigma) = 0{,}99$

Fonte: Ribeiro, André L. P., notas de aula.

Distribuição Normal, exemplo III

Queremos transformar $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ em $Z \sim N(0, 1)$, para poder consultar a tabela da normal padronizada.

(a) $P(X \leq \mu + 2\sigma) = P(X - \mu \leq 2\sigma) = P((X - \mu)/\sigma \leq 2) = P(Z \leq 2) = \Phi(2) = 0,9772.$

(b) $P(|X - \mu| \leq \sigma) = P(|X - \mu|/\sigma \leq 1) = P(|(X - \mu)/\sigma| \leq 1) = P(|Z| \leq 1) = P(-1 \leq Z \leq 1) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 0,6827.$

Distribuição Normal, exemplo III

(c) Note que $P(\mu - a\sigma \leq X \leq \mu + a\sigma) = P(-a \leq (X - \mu)/\sigma \leq a) = P(-a \leq Z \leq a)$. Como X é simétrica, então sabemos que $2P(Z > a) = 2P(Z < -a) = 1 - P(-a \leq Z \leq a)$.

Basta então olhar qual "a" satisfaz $P(Z > a) = 0{,}005$, ou simplesmente $P(Z \leq a) = \Phi(a) = 0{,}995$. Consultando a tabela, vemos que $a \approx 2,57$.

Distribuição Beta

Exemplo

Seja X a v. a. contínua cuja densidade de probabilidade é

$$f(x) = 2x, \quad 0 \leq x \leq 1$$

(a) Calcule a distribuição acumulada $F(x)$, o valor esperado $\mathbb{E}(X)$, a variância $\text{Var}(X)$ e o desvio padrão $\sigma(X)$.

(b) Calcule $P(0 < X < 1/2)$ e $P(1/3 < X < 1)$.

(c) Esboce o gráfico de $F(x)$ e determine o valor de x_0 tal que $F(x_0) = 0,95$.

Fonte: Ribeiro, André L. P., notas de aula.

Distribuição Beta

(a) A função de distribuição acumulada, em $[0, 1]$, é dada por:

$$\int_0^x 2t dt = x^2.$$

Então, concluímos que

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 0 \\ x^2 & \text{se} \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{se} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Distribuição Beta

(a) (cont.) A esperança é dada por

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^1 x2xdx = 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

Para calcular a variância, lembre-se da fórmula $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X)$, então

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_0^1 x^2 2xdx = 2\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}$$

Finalmente, observe que $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$ e logo $\sigma(X) = \sqrt{2}/6$.

(b) Conhecemos $F(x)$, a função de distribuição acumulada. Então temos simplesmente que

$$P(0 < X < 1/2) = P(X < 1/2) - P(X < 0) = F(0,5) - F(0) =$$

$$= 0,5^2 - 0 = 0,25.$$

$$P(1/3 < X \leq 1) = P(X < 1) - P(X < 1/3) = F(1) - F(1/3) =$$

$$= 1^2 - \frac{1}{3^2} = \frac{8}{9}.$$

Distribuição Beta

(c) O ponto x_0 que satisfaz $F(x_0) = (x_0)^2 = 0,95$ é $x_0 = 0,9746$. O gráfico de $F(x)$ com o par $(x_0, F(x_0))$ destacado é dado por: