Distribuição Binomial

Exemplo

Na manufatura de certo artigo, é sabido que um entre dez é defeituoso. Qual a probabilidade de que uma amostra casual de tamanho quatro contenha:

(a) Nenhum defeituoso?

(b) Exatamente um defeituoso?

(c) Exatamente dois defeitosos?

(d) Não mais do que dois defeituosos?

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 157.

Distribuição Binomial

A verificação da qualidade de cada artigo é um ensaio de Bernoulli, onde por "sucesso" definimos o item ser defeituoso. O número de artigos defeituosos em amostras de tamanho 4 , portanto, uma varivel aleatória com distribuição binomial de parâmetros $n = 4$ e $p = 0{,}1$. Seja Y a variável aleatória "número de artigos defeituosos na amostra". Assim:

(a) $P(Y = 0) = \binom{4}{0} 0{,}9^4 = 0{,}6561.$

(b) $P(Y = 1) = \binom{4}{1} 0{,}1 \times 0{,}9^3 = 0{,}2916.$

(c) $P(Y = 2) = \binom{4}{2} 0{,}1^2 \times 0{,}9^2 = 0{,}0486.$

(d) $P(Y \leq 2) = P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2) = 0{,}9963.$

Distribuição binomial

Exemplo

Um fabricante de peças de automóveis garante que uma caixa de suas peças conterá, no máximo, duas defeituosas. Se a caixa contém 18 peças, e a experiência tem demonstrado que esse processo de fabricação produz 5% de peças defeituosas, qual a probabilidade de que uma caixa satisfaça a garantia?
Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5^a edição, pág 157.

Distribuição binomial

A variável aleatria X = "número de peças defeituosas" tem distribuição binomial de parâmetros $n = 18$ e $p = 0{,}05$. Note novamente que o "sucesso" dos ensaios de Bernoulli é encontrar uma peça defeituosa. A probabilidade de uma caixa satisfazer a promessa do fabricante (isto é, $X \leq 2$) é dada por:

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) =$$

$$\binom{18}{0} 0{,}95^{18} + \binom{18}{1} 0{,}05 \times 0{,}95^{17} + \binom{18}{2} 0{,}05^{2} \times 0{,}95^{16} = 0{,}9419.$$

Ou seja, a probabilidade de que uma caixa satisfaça a garantia é de 94,19%.

Distribuição binomial

Exemplo

Um industrial fabrica peças, das quais $1/5$ são defeituosas. Dois compradores **A** e **B** classificaram um grande lote de peças adquiridas em categorias I e II, pagando \$1,20 e \$0,80 por peça, respectivamente, do seguinte modo:

> Comprador **A**: retira uma amostra de cinco peças e, se encontrar mais do que uma defeituosa, classifica o lote como II.
>
> Comprador **B**: retira uma amostra de dez peças e, se encontrar mais do que duas defeituosas, classifica o lote como II.

Em média, qual comprador oferece maior lucro?
Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5^a edição, pág 159.

Distribuição binomial

Sabemos que $1/5$ das peças são defeituosas. Podemos nos concentrar na probabilidade dos vendedores julgarem um lote como tipo I ou II. A varivel aleatria do experimento do comprador **A** tem distribuição $X_A \sim \text{bin}(5, 1/5)$, enquanto que a varivel aleatria do experimento do comprador **B** tem distribuição $X_B \sim \text{bin}(10, 1/5)$. Para o comprador **A**, temos que

$$P(X_A > 1) = 1 - P(X_A = 0) - P(X_A = 1) =$$

$$= 1 - \binom{5}{0}\left(1 - \frac{1}{5}\right)^5 - \binom{5}{1}\left(\frac{1}{5}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right)^4 = 0{,}2627$$

Distribuição binomial

De modo similar,

$$P(X_B \geq 2) = 1 - \binom{10}{0}\left(1-\frac{1}{5}\right)^{10} - \binom{10}{1}\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{5}\right)^{9} -$$

$$-\binom{10}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^{2}\left(1-\frac{1}{5}\right)^{8} = 0{,}3222$$

Como o segundo comprador irá classificar o lote como *II* com maior probabilidade que o primeiro, ele é o que oferece menor lucro para o fornecedor. Contudo podemos, ainda, verificar o lucro esperado do vendedor.

Se o industrial decidir vender o lote para o comprador **A**, temos que

$$\mathbb{E}(\text{lucro } \mathbf{A}) = 1{,}20 \times 0{,}7373 + 0{,}80 \times 0{,}2627 \approx 1{,}09,$$

ou seja, ele irá lucrar em média $1,09 por peça. No entanto, se ele vender para o comprador **B**, temos que

$$\mathbb{E}(\text{lucro } \mathbf{B}) = 1{,}20 \times 0{,}6778 + 0{,}80 \times 0{,}3222 \approx 1{,}07,$$

que é um lucro dois centavos inferior.

Distribuição Poisson

Exemplo

Numa central telefônica, o número de chamadas chega segundo uma distribuição de Poisson, com a média de oito chamadas por minuto. Determine a probabilidade de que num minuto se tenha:

(a) dez ou mais chamadas;

(b) menos que nove chamadas;

(c) entre sete (inclusive) e nove (exclusive) chamadas.

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 152.

Distribuição Poisson

Sabemos que se $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, então sua função de probabilidade é

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}.$$

Além disso, $\mathbb{E}(X) = \lambda$. O enunciado diz "média de oito chamadas por minuto", então a variável aleatória X = "número de chamadas por minuto" tem distribuição de Poisson(8).

(a) A probabilidade de dez ou mais chamadas é dada por $P(X \geq 10) = 1 - P(X < 10) = 1 - P(X \leq 9) =$

$$1 - \sum_{k=0}^{9} \frac{e^{-8}8^k}{k!} = 1 - e^{-8} - \ldots - \frac{e^{-8}8^9}{9!} = 0{,}2833.$$

(b) A probabilidade de termos menos que do que nove chamadas é dada por $P(X < 9) = P(X \leq 8) = e^{-8} + \ldots + \frac{e^{-8}8^8}{8!} =$ 0,5926.

(c) Novamente é preciso tratar as desigualdades com cuidado no caso discreto. Desejamos calcular $P(7 \leq X < 9)$, que é igual a $P(7 \leq X \leq 8) = P(X = 7) + P(X = 8) =$

$$\frac{e^{-8}8^7}{7!} + \frac{e^{-8}8^8}{8!} = 0{,}2792$$

Distribuição Geométrica

Exemplo

Considere o experimento de se lançar um dado não-viciado até obter a face 6.

(a) Lançou-se o dado 6 vezes e no se obteve a face 6. Qual a probabilidade desse resultado?

(b) Suponha que se continue lanando at´ se obter a face 6. Qual é a probabilidade de observamos esse resultado na k-ésima jogada?

Distribuição Geométrica

(a) Ao se lanar um dado, observar-se ou no a faze 6 corresponde a um ensaio de Bernoulli, com probabilidade $1/6$ de se obter sucesso. Se considerarmos que cada uma das jogadas é independente, a probabilidade de no observamos a face 6 em nenhuma das seis vezes é

$$\left(\frac{5}{6}\right)^6 = 0{,}33489$$

Distribuição Geométrica

(b) Ao efetuar o primeiro lanamento, podemos observar a face 6 com probabilidade $1/6$, ou continuar lanando. Se no observarmos a face 6 na primeira jogada, podemos jogar o dado pela segunda vez, e observamos face 6 com probabilidade $5/6 \times 1/6$, ou continuar jogando. Repetindo esse raciocínio, concluímos que a probabilidade de se observar a face 6 na k-ésima jogada é

$$P(X = k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6}$$

Chamamos essa distribuição de *distribuição geométrica*, com parâmetro $p = 1/6$.

Distribuição Geométrica

Exemplo

Um banco de sangue necessita sangue do tipo O negativo. Suponha que a probabilidade de uma pessoa ter este tipo de sangue seja 0,10. Doadores permanentes chegam ao hemocentro para fazer sua doação rotineira. Calcule as probabilidades de que o primeiro doador com sangue do tipo O negativo seja:

(a) o primeiro a chegar;

(b) o segundo;

(c) o sétimo.

(d) Quantos doadores esperamos passar pelo hospital até encontrarmos um com sangue O negativo?

Fonte: Prof. Mario Gneri, Notas de Aula.

Distribuição Geométrica

Novamente temos um experimento com distribuição geométrica. Usando a fórmula para a função de probabilidade $p(x) = 0{,}9^{x-1}0{,}1$, temos que

(a) $P(X = 1) = 0{,}1$

(b) $P(X = 2) = 0{,}9 \times 0{,}1 = 0{,}09$

(c) $P(X = 7) = 0{,}9^6 \times 0{,}1 = 0{,}053$

(d) Sabemos que se $X \sim \text{Geo}(p)$, então $\mathbb{E}(X) = p^{-1}$. Neste caso, esperamos que $1/(1/10) =$ dez doadores passem pelo hospital, em média, para encontrarmos o primeiro com sangue O negativo.

Distribuição Binomial, aproximação Poisson

Exemplo

Suponha que a probabilidade de que um item produzido por uma máquina seja defeituoso é de 0,2. Se dez itens produzidos por essa máquina são selecionados ao acaso, qual é a probabilidade de que não mais do que um defeituoso seja encontrado? Use a binomial e a distribuição de Poisson e compare os resultados.
Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 152.

Distribuição Binomial, aproximação Poisson

O evento "não mais do que 1 item defeituoso" é dado por $\{X = 0\} \cup \{X = 1\}$, onde X é o número de itens defeituosos. Sua probabilidade é $P(\{X = 0\} \cup \{X = 1\}) = P(X = 0) + P(X = 1)$.

Se utilizamos a distribuição binomial, $X \sim \text{bin}(10, 0{,}2)$, então

$$P(X = 0) + P(X = 1) = \binom{10}{0}(1-p)^{10} + \binom{10}{1}p(1-p)^{9}$$

$$= \binom{10}{0}0{,}8^{10} + \binom{10}{1}0{,}2 \times 0{,}8^{9} = 0{,}3758.$$

Distribuição Binomial, aproximação Poisson

Por outro lado, se utilizarmos a distribuição de Poisson para aproximar a binomial, temos que $X \sim \text{Poisson}(2)$ (onde $\lambda = n \times p$), e a probabilidade do evento $\{X = 0\} \cup \{X = 1\}$ é dada por:

$$P(\{X = 0\} \cup \{X = 1\}) = P(X = 0) + P(X = 1) =$$

$$= \frac{e^{-2}2^0}{0!} + \frac{e^{-2}2^1}{1!} = 3 \times e^{-2} = 0{,}4060$$

As probabilidades diferem em 3 pontos percentuais, o que não é pouco. A diferença tende a diminuir, contudo, para valores maiores de n e menores de p.

Distribuição Hipergeométrica, aproximação Binomial

Qualidade de Reagentes

O inspetor de qualidade de um laboratório clínico recebe um lote grande de reagentes que, segundo o fabricante, não contém mais do que 5% de produtos defeituosos. O inspetor toma uma amostra de 10 produtos e decide rejeitar o lote completo se a amostra tiver pelo menos um reagente defeituoso. Qual a probabilidade de rejeitar um lote que esteja dentro das especificações do fabricante, por engano? E se o lote, ao invés de ser "grande", tiver apenas 80 reagentes?

Distribuição Hipergeométrica, aproximação Binomial

Se o tamanho do lote é "grande" e a proporção de itens defeituosos é de 5%, então o número de reagentes defeituosos numa amostra aleatória simples de 10 reagentes tem distribuição binomial, com parâmetros $n = 10$ e $p = 0{,}05$.

Nesse caso, a probabilidade do inspetor rejeitar um lote dentro das especificações do fabricante é dada por

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}95^{10} = 0{,}4012$$

Distribuição Hipergeométrica, aproximação Binomial

Se o tamanho do lote é de 80 unidades, então 5% de reagentes defeituosos representam 4 reagentes defeituosos no lote. O número de reagentes defeituosos numa amostra de $n = 10$ reagentes tem distribuição hipergeométrica, com parâmetros $n = 10$, $N = 80$ e $r = 4$. Nesse caso, a probabilidade de rejeitar um lote dentro das especificações do fabricante é dada por

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{\binom{4}{0}\binom{76}{10}}{\binom{80}{10}} = 0{,}4202$$