Exemplo

Para a Copa do Mundo 24 países são divididos em seis grupos, com 4 países cada um. Supondo que a escolha do grupo de cada país é feita ao acaso, calcular a probabilidade de que dois países determinados A e B se encontrem no mesmo grupo.
Fonte: Morgado, Carvalho, Carvalho & Fernandez, Análise Combinatória e Probabilidade, pág 125.

Técnicas de Contagem

Vamos tomar como espaço amostral o conjunto de todas as permutações de 24 elementos; ou seja **o número de casos possíveis é 24!**. Agora, cada um dos 24 times serão divididos em 6 grupos de 4 times.

I	II	III	IV	V	VI
●●●●	●●●●	●●●●	●●●●●	●●●●	●●●●

Quantas permutações existem tais que A e B pertençam ao mesmo grupo? Tome primeiro o grupo I. A pode ser colocado em 4 lugares; restam para B 3 lugares no mesmo grupo, e os times restantes podem ser dispostos de 22! maneiras diferentes.

Técnicas de Contagem

Portanto o número de permutações com A e B no primeiro grupo é

$$4 \cdot 3 \cdot 22!$$

E como temos 6 grupos, a probabilidade procurada é igual ao número de casos favoráveis sobre os possíveis, ou simplesmente

$$\frac{6 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 22!}{24!} = \frac{3}{23} \approx 0{,}13$$

Probabilidade Condicional

Exemplo

Consideremos dois dados: um deles equilibrado, com $P(\{1\}) = \ldots = P(\{6\}) = 1/6$, e outro viciado, com $P(\{1\}) = 1/2$ e $P(\{2\}) = \ldots = P(\{6\}) = 1/10$. Escolhe-se um dos dados ao acaso e se efetuam dois lançamentos, obtendo-se dois uns. Qual a probabilidade condicional de que o dado escolhido tenha sido o viciado?
Fonte: Morgado, Carvalho, Carvalho & Fernandez, Análise Combinatória e Probabilidade, pág 148.

Probabilidade Condicional

Temos que cada dado é escolhido com $1/2$ de probabilidade. A probabilidade de observar $\{1,1\}$ em dois lançamentos de um dado não viciado é $1/6 \cdot 1/6 = 1/36$. Para o dado viciado, temos que essa probabilidade é igual a $1/2 \cdot 1/2 = 1/4$.

A probabilidade do evento $E =$"observar dois uns" é dada pela união dos eventos $E_1 =$"sortear o dado viciado e observar dois uns" e $E_2 =$"sortear o dado equilibrado e observar dois uns". Ou seja,

$$P(E) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{36} = \frac{5}{36}$$

Probabilidade Condicional

A probabilidade do dado escolhido ser o viciado, dado que se observou dois uns, é dada por

$$\frac{P(\text{“sortear o dado viciado e observar dois uns”})}{P(\text{“observar dois uns”})} = \frac{1/8}{5/36} = \frac{9}{10}$$

Probabilidade Condicional

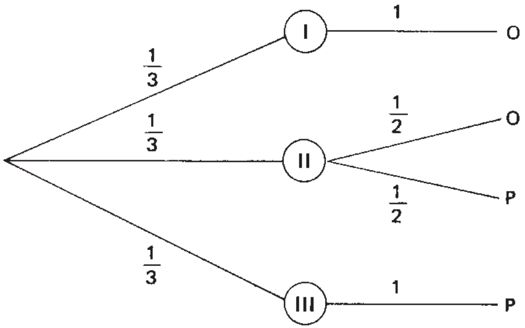
Exemplo

Esse problema é conhecido como *Problema da moeda de Bertrand*. Existem três caixas idênticas. A primeira contém duas moedas de ouro, a segunda contém uma de ouro e outra de prata, e a terceira contém duas moedas de prata. Uma caixa é selecionada ao acaso e da mesma é escolhida uma moeda ao acaso. Se a moeda é de ouro, qual a probabilidade de que a outra moeda da caixa escolhida também seja de ouro?

Fonte: Hazzan, Matemática Elementar: Combinatória e Probabilidade, pág 104-E.

Probabilidade Condicional

Considere o diagrama:



Probabilidade Condicional

Note que o problema pode ser reformulado da seguinte forma: "Se a moeda sorteada é de ouro, qual a probabilidade de que ela tenha vindo da caixa I?", pois a caixa I é a única que contém duas moedas de ouro.

Sejam os eventos:

- C_I: A caixa sorteada é a I.
- C_{II}: A caixa sorteada é a II.
- C_{III}: A caixa sorteada é a III.
- O: A moeda sorteada é de ouro.

Probabilidade Condicional

Novamente note que $\Omega = C_I \cup C_{II} \cup C_{III}$, e consequentemente

$$P(O) = P(C_I \cap O) + P(C_{II} \cap O) + P(C_{III} \cap O)$$

$$P(O) = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$$

Como $P(C_I \cap O) = 1/3$, temos simplesmente que

$$P(C_I | O) = \frac{P(C_I \cap O)}{P(O)} = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}$$

Ou seja, a probabilidade de que a outra moeda também seja de ouro é de $2/3$.

Independência

Exemplo

Dizemos que os eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são independentes se $P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \ldots P(A_{i_k})$. Para apenas dois eventos, A e B, isso significa que A e B são independentes se $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Mostre um caso $n = 3$ onde vale a independência 2 a 2, mas os eventos não são independentes. *Fonte: Morgado, Carvalho, Carvalho & Fernandez*, Análise Combinatória e Probabilidade, pág 154.

Independência

Considere o espaço amostral $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, e defina $P(\omega_i) = 1/4$, para $i = 1, 2, 3, 4$. Defina agora os eventos $A = \{\omega_1, \omega_3\}$, $B = \{\omega_2, \omega_3\}$ e $C = \{\omega_3, \omega_4\}$. Temos que $P(A) = P(B) = P(C) = 1/2$. Além disso,

$$P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = \frac{1}{4}$$

ou seja, os eventos são, dois a dois, independentes. Contudo,

$$P(A \cap B \cap C) = P(\{\omega_3\}) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = P(A)P(B)P(C)$$

Independência

Exemplo

Um jogador deve enfrentar, em um torneio, dois outros, chamados A e B. Os resultados dos jogos são independentes e as probabilidades dele ganhar de A e de B são $1/3$ e $2/3$, respectivamente. O jogador vencerá o torneio se ganhar dois jogos consecutivos, de uma série de 3. Que série de jogos é mais favorável para o jogador: ABA ou BAB?
Fonte: Morgado, Carvalho, Carvalho & Fernandez, Análise Combinatória e Probabilidade, pág 155.

Independência

A probabilidade do jogador vencer se escolher a primeira série é (i) ganha de A, ganha de B ou (ii) perde para A, ganha de B e ganha de A. Ou seja,

$$P(ABA) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{10}{27}$$

A probabillidade do jogador vencer se escolher a segunda série BAB é

$$P(BAB) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$$

Independência

A primeira série é mais favorável. Este resultado parece surpreendente pois A é um adversário mais difícil, e o jogador deve enfrentá-lo duas vezes na primeira série.

O que acontece intuitivamente é que o jogo com A na segunda série é decisivo. Na primeira série, o jogador tem duas chances para derrotar A.

Independência

Exemplo

(a) Um dado equilibrado é lançado quatro vezes. Os lançamentos são independentes. Qual a probabilidade de observar a face 6 pelo menos uma vez?

(b) Dois dados equilibrados são lançados simultaneamente, 10 vezes. Os lançamentos são independentes. Qual a probabilidade de observar a dupla de 6 pelo menos uma vez?

Independência

(a) Seja A o evento "observar a face 6 pelo menos 1 vez". Temos que

$$P(A) = 1 - P(A^c),$$

onde A^c é o evento "não observar a face 6 nenhuma vez". Esse evento é mais fácil de determinar a probabilidade, pois cada lançamento é independente, e a probabilidade de não observarmos 6 em algum lançamento é igual a $5/6$.

Aí $P(A^c) = (5/6)^4$, pela independência, e consequentemente $P(A) = 1 - (5/6)^4$.

Independência

(b) Considere A o evento "dupla de 6 pelo menos uma vez". Novamente, é mais fácil considerar $A^c =$ "dupla de 6 não é observada nenhuma vez". É sabido que $P(A) = 1 - P(A^c)$. Considere a probabilidade conjunta dos lançamentos $P(\{6,6\}) = 1/36$, então

$$P(A^c) = (35/36)^{10}$$

E aí $P(A) = 1 - (35/36)^{10}$.

Independência

Exemplo

Peças são produzidas em uma linha de produção. A probabilidade de observar uma peça defeituosa é 0,10. Selecionamos uma amostra de tamanho 10. Qual a probabilidade de obter duas peças defeituosas nesta amostra? As peças são selecionadas independentemente.

Independência

Seja D o evento "peça é defeituosa", e B o evento "peça é boa". Então $P(D) = 0{,}1$ e $P(B) = 0{,}9$. Seja $A =$ "duas peças defeituosas na amostra". Como a ordem em que essas peças são sorteadas não importa, temos que são favoráveis os casos

$$\{DDBBBBBBBB, DBDBBBBBBB, \ldots, BBBBBBBBDD\},$$

ao todo $\binom{10}{2}$ casos. Pela independência, todos tem probabilidade $0{,}1^2 0{,}9^8$. Então $P(A)$ é dada por

$$P(A) = \binom{10}{2} 0{,}1^2 0{,}9^8 = 0{,}19371$$

Exercícios Complementares: Contagem

Exercício

(1) Quantos números diferentes de 4 algarismos distintos existem no sistema decimal de enumeração?

(2) Quantos números ímpares diferentes de 4 algarismos distintos existem no sistema decimal de enumeração?

(3) Quantos números, compreendidos entre 3000 e 4000, formados de algarismos distintos, podemos formar com os algarismos 2, 3, 4, 6, 8 e 9, de modo que não sejam algarismos repetidos?

Exercícios Complementares: Contagem

Exercício

(4) Num grupo de 5 pessoas, duas são irmãs. O número de maneiras distintas pelas quais elas podem ficar em fila, de modo que as duas irmãs sempre fiquem juntas é igual a?

(5) Quantos números ímpares compreendidos entre 2000 e 7000 podemos formar com os algarismos 2, 3, 4, 6, 8 e 9, de modo que não tenham números repetidos?

Exercício

(6) Sobre uma reta ($R1$) marca-se 7 pontos e sobre uma outra reta ($R2$), paralela a primeira reta, marca-se 4 pontos. Qual o número de triângulos que obtemos unindo 3 dos quaisquer dos 11 pontos?

(7) Em uma reunião há 12 rapazes, 4 dos quais usam óculos e 16 moças, 6 das quais usam óculos. De quantas maneiras possíveis podem ser formados casais para dançar, se quem usa óculos só quer fazer par com quem não usa óculos?

Exercício

(8) Para diminuir o emplacamento de carros roubados, um determinado país resolveu fazer um cadastro nacional, em que as placas são formadas com 3 letras e 4 algarismos, sendo que a primeira letra da placa determina um estado desse país. Considerando o alfabeto com 26 letras, o número máximo de carros que cada estado pode emplacar será

Exercícios Complementares: Probabilidade Condicional

Exercício

(1) Um experimento consiste em lançar um dado equilibrado duas vezes, independentemente. Dado que os dois números sejam diferentes, qual é a probabilidade condicional de:

(1.a) pelo menos um dos números ser 6

(1.b) a soma dos números ser 8

(2) Sabe-se que de cada 5 pessoas de uma determinada comunidade, uma é portadora de um certo tipo de anemia. Se selecionarmos, ao acaso, 3 pessoas dessa comunidade, qual a probabilidade de pelo menos uma delas seja portadora daquele tipo de anemia?

Exercícios Complementares: Probabilidade Condicional

Exercício

(3) 4 homens e 4 mulheres devem ocupar 8 lugares de um banco. Qual a probabilidade de que nunca fiquem lado a lado duas pessoas do mesmo sexo?

(4) Durante o mês de novembro a probabilidade de chuva é de 0,3. O Brasil ganha o jogo em um dia com chuva com probabilidade de $0,4$, em dia sem chuva com probabilidade 0,6. Se o Brasil ganhou em novembro, qual é a probabilidade de que choveu nesse dia?

Exercícios Complementares: Probabilidade Condicional

Exercício

(5) Pedro quer enviar uma carta para Mariana. A probabilidade de que Pedro escreva a carta é 0,80. A probabilidade de que o correio não a perca é de 0,90. A probabilidade de que o carteiro a entregue é 0,90. Dado que Mariana não recebeu a carta, qual é a probabilidade condicional de que Pedro não a tenha escrito?