Técnicas de Contagem

Exemplo

Para uma determinada ediação da Copa do Mundo 24 países são divididos em seis grupos, com 4 países cada. Supondo que a escolha do grupo de cada país é feita ao acaso, calcule a probabilidade de que dois determinados países, digamos A e B, se encontrem no mesmo grupo.
Fonte: Morgado, Carvalho, Carvalho & Fernandez, Análise Combinatória e Probabilidade, pág 125.

Técnicas de Contagem

Vamos tomar como espaço amostral o conjunto de todas as permutações de 24 elementos; ou seja **o número de casos possíveis é 24!**. Agora, cada um dos 24 times serão divididos em 6 grupos de 4 times, ou seja:

I	II	III	IV	V	VI
●●●●	●●●●	●●●●	●●●●●	●●●●	●●●●

Quantas permutações existem tais que A e B pertencem ao mesmo grupo? Tome primeiro o grupo I. A pode ser colocado em 4 lugares; restando para B, 3 lugares no mesmo grupo, enquanto que os times restantes podem ser dispostos de 22! maneiras diferentes.

Técnicas de Contagem

Portanto o número de permutações com A e B no primeiro grupo é

$$4 \cdot 3 \cdot 22!.$$

Como temos 6 grupos, sob um espaço amostral equiprobabilístico, a probabilidade procurada é igual ao número de casos favoráveis sobre os possíveis, ou simplesmente

$$\frac{6 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 22!}{24!} = \frac{3}{23} \approx 0{,}13$$

Exemplo

Consideremos dois dados: um deles equilibrado, ou seja $P(\{1\}) = \ldots = P(\{6\}) = 1/6$, e outro viciado, em que $P(\{1\}) = 1/2$ e $P(\{2\}) = \ldots = P(\{6\}) = 1/10$. Escolhe-se um dos dados ao acaso e se efetuam dois lançamentos, obtendo-se duas faces "um". Qual a probabilidade condicional de que o dado escolhido tenha sido o viciado?

Fonte: Morgado, Carvalho, Carvalho & Fernandez, Análise Combinatória e Probabilidade, pág 148.

Probabilidade Condicional

Temos que cada dado é escolhido com probabilidade $1/2$. A probabilidade de observar $\{1, 1\}$ em dois lançamentos de um dado não viciado é $1/6 \cdot 1/6 = 1/36$. Para o dado viciado, temos que essa probabilidade é igual a $1/2 \cdot 1/2 = 1/4$.

A probabilidade do evento $E =$"observar dois uns" é dada pela união dos eventos $E_1 =$"sortear o dado viciado (DV) e observar dois uns" e $E_2 =$"sortear o dado equilibrado (DE) e observar dois uns". Ou seja,

$$\begin{aligned}
P(E) &= P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) \\
&= P(DV)P(\{1,1\}|DV) + P(DE)P(\{1,1\}|DE) \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{36} = \frac{5}{36}
\end{aligned}$$

Probabilidade Condicional

A probabilidade do dado escolhido ser o viciado, dado que se observou dois uns, é dada por

$$\frac{P(\text{“sortear o dado viciado e observar dois uns”})}{P(\text{“observar dois uns”})} = \frac{1/8}{5/36} = \frac{9}{10}$$

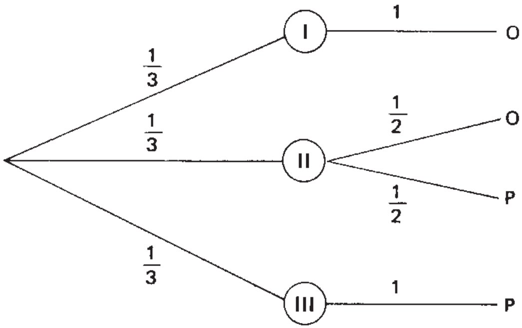
Probabilidade Condicional

Exemplo

Esse problema é conhecido como *Problema da moeda de Bertrand*. Existem três caixas idênticas. A primeira contém duas moedas de ouro, a segunda contém uma de ouro e outra de prata, e a terceira contém duas moedas de prata. Uma caixa é selecionada ao acaso e dela escolhida uma moeda ao acaso. Se a moeda é de ouro, qual a probabilidade de que a outra moeda da caixa escolhida também seja de ouro?
Fonte: Hazzan, Matemática Elementar: Combinatória e Probabilidade, pág 104-E.

Probabilidade Condicional

Considere o diagrama:



Note que o problema pode ser reformulado da seguinte forma: "Se a moeda sorteada é de ouro, qual a probabilidade de que ela tenha vindo da caixa I?", pois a caixa I é a única que contém duas moedas de ouro.

Sejam os eventos:

- C_I: A caixa sorteada é a I.
- C_{II}: A caixa sorteada é a II.
- C_{III}: A caixa sorteada é a III.
- O: A moeda sorteada é de ouro.

Probabilidade Condicional

Novamente note que $\Omega = C_I \cup C_{II} \cup C_{III}$, e consequentemente

$$\begin{aligned}
P(O) &= P(C_I \cap O) + P(C_{II} \cap O) + P(C_{III} \cap O) \\
&= P(C_I \cap O) + P(C_{II} \cap O) + P(C_{III} \cap O) \\
&= P(C_I)P(O|C_I) + P(C_{II})P(O|C_{II}) + P(C_{III})P(O|C_{III}) \\
&= \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 0 = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Como $P(C_I \cap O) = 1/3$, temos simplesmente que

$$P(C_I|O) = \frac{P(C_I \cap O)}{P(O)} = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}$$

Ou seja, a probabilidade de que a outra moeda também seja de ouro é de $2/3$.

Independência

Exemplo

Dizemos que os eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são independentes se (e somente se) $P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \ldots P(A_{i_k})$. Para apenas dois eventos, A e B, isso significa que A e B são independentes se (e somente se) $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Mostre um caso com $n = 3$ onde vale a independência 2 a 2, mas os três eventos não são independentes.

Fonte: Morgado, Carvalho, Carvalho & Fernandez, Análise Combinatória e Probabilidade, pág 154.

Independência

Considere o espaço amostral $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, e defina $P(\omega_i) = 1/4$, para $i = 1, 2, 3, 4$. Defina agora os eventos $A = \{\omega_1, \omega_3\}$, $B = \{\omega_2, \omega_3\}$ e $C = \{\omega_3, \omega_4\}$. Temos que $P(A) = P(B) = P(C) = 1/2$. Além disso,

$$P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = \frac{1}{4}$$

ou seja, os eventos são, dois a dois, independentes. Contudo,

$$P(A \cap B \cap C) = P(\{\omega_3\}) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = P(A)P(B)P(C).$$

Independência

Exemplo

Um jogador deve enfrentar, em um torneio, dois outros, chamados A e B. Os resultados dos jogos são independentes e as probabilidades dele ganhar de A e de B são $1/3$ e $2/3$, respectivamente. O jogador vencerá o torneio se ganhar dois jogos consecutivos, de uma série de 3. Que série de jogos é mais favorável para o jogador: ABA ou BAB?

Fonte: Morgado, Carvalho, Carvalho & Fernandez, Análise Combinatória e Probabilidade, pág 155.

Independência

A probabilidade do jogador vencer se escolher a primeira série é (i) ganha de A, ganha de B ou (ii) perde para A, ganha de B e ganha de A. Ou seja,

$$P(ABA) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{10}{27}.$$

Analogametne, a probabillidade do jogador vencer se escolher a segunda série BAB é (i) ganha de B, ganha de A ou (ii) perde para B, ganha de A e ganha de B. Ou seja,

$$P(BAB) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27}.$$

Independência

A primeira série é mais favorável. Este resultado parece surpreendente pois A é um adversário mais difícil, e o jogador deve enfrentá-lo duas vezes na primeira série.

O que acontece intuitivamente é que o jogo com A na segunda série é decisivo. Na primeira série, o jogador tem duas chances para derrotar A.

Independência

Exemplo

(a) Um dado equilibrado é lançado quatro vezes. Os lançamentos são independentes. Qual a probabilidade de observar a face 6 pelo menos uma vez?

(b) Dois dados equilibrados são lançados simultaneamente, 10 vezes. Os lançamentos são independentes. Qual a probabilidade de observar a dupla de 6 pelo menos uma vez?

Independência

(a) Seja A o evento “observar a face 6 pelo menos 1 vez”. Temos que

$$P(A) = 1 - P(A^c),$$

onde A^c é o evento “não observar a face 6 nenhuma vez”. Para esse evento é mais fácil de determinar a probabilidade, pois cada lançamento é independente, e a probabilidade de não observarmos 6 em algum lançamento é igual a $5/6$.

Então $P(A^c) = (5/6)^4$, pela independência, e consequentemente $P(A) = 1 - (5/6)^4$.

Independência

(b) Considere A o evento "dupla de 6 pelo menos uma vez". Novamente, é mais fácil considerar A^c = "dupla de 6 não é observada nenhuma vez". Com efeito, temos que $P(A) = 1 - P(A^c)$. Considere a probabilidade conjunta dos lançamentos $P(\{6,6\}) = 1/36$, então

$$P(A^c) = (35/36)^{10}$$

Então, portanto, $P(A) = 1 - (35/36)^{10}$.

Independência

Exemplo

Peças são produzidas em uma linha de produção. A probabilidade de observar uma peça defeituosa é 0,10. Selecionamos uma amostra de tamanho 10. Qual a probabilidade de obtermos duas peças defeituosas nesta amostra? As peças são selecionadas independentemente.

Independência

Seja D o evento "a peça é defeituosa", e B o evento "a peça é boa", então $P(D) = 0{,}1$ e $P(B) = 0{,}9$. Seja $A =$ "há duas peças defeituosas na amostra". Como a ordem em que essas peças são sorteadas não importa, temos que são favoráveis ao evento de interesse os casos

$$\{DDBBBBBBBB, DBDBBBBBBB, \ldots, BBBBBBBBDD\},$$

ao todo temos $\binom{10}{2}$ casos. Pela independência entre o resultado de cada peça sorteada, cada um deses eventos tem probabilidade $0{,}1^2 0{,}9^8$. Então $P(A)$ é dada por

$$P(A) = \binom{10}{2} 0{,}1^2 0{,}9^8 = 0{,}19371$$

Exercícios Complementares: Contagem

Exercício

(1) Quantos números diferentes de 4 algarismos distintos existem no sistema decimal de enumeração?

(2) Quantos números ímpares diferentes de 4 algarismos distintos existem no sistema decimal de enumeração?

(3) Quantos números, compreendidos entre 3000 e 4000, formados de algarismos distintos, podemos formar com os algarismos 2, 3, 4, 6, 8 e 9?

Exercícios Complementares: Contagem

1) $9 \times 9 \times 8 \times 7 = 4536$ (não pode começar por 0).
2) $5 \times (8 \times 8 \times 7 \times 1) = 2240$ (não pode começar por 0 e tem de terminar em 1, 3, 5, 7 ou 9).
3) $1 \times 5 \times 4 \times 3 = 60$ (tem que começar por 3, necessariamente).

Exercícios Complementares: Contagem

Exercício

(4) Num grupo de 5 pessoas, duas são irmãs. O número de maneiras distintas pelas quais elas podem ficar em fila, de modo que as duas irmãs sempre fiquem juntas é igual a?

(5) Quantos números ímpares compreendidos entre 2000 e 7000 podemos formar com os algarismos 2, 3, 4, 6, 8 e 9, de modo que não tenham números repetidos?

Exercícios Complementares: Contagem

4) $AB[(I1)(I2)]E$: $4! \times 2! = 24 \times 2 = 48$ (as irmãs I1 e I2 tem de ficar juntas).
5) $3 \times 4 \times 3 \times (3) + 4 \times 4 \times 3 \times (9) = 84$ (tem que terminar em 3 ou em 9 e tem que começar por 2, 3, 4 ou 6).

Exercícios Complementares: Contagem

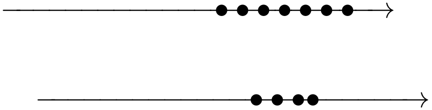
Exercício

(6) Sobre uma reta ($R1$) marca-se 7 pontos e sobre uma outra reta ($R2$), paralela a primeira reta, marca-se 4 pontos. Qual o número de triângulos que obtemos unindo 3 dos quaisquer dos 11 pontos?

(7) Em uma reunião há 12 rapazes, 4 dos quais usam óculos e 16 moças, 6 das quais usam óculos. De quantas maneiras possíveis podem ser formados casais para dançar, se quem usa óculos só quer fazer par com quem não usa óculos?

Exercícios Complementares: Contagem

6) Duas retas paralelas:



Um ponto na primeira reta e dois na segunda ou Dois pontos na primeira reta e uma na segunda :
$7 \times \binom{4}{2} + \binom{7}{2} \times 4 = 7 \times 6 + 21 \times 4 = 126$

7) Rapaz com óculos e moças sem óculos + Rapaz sem óculos e moças com óculos $= 4 \times 10 + 8 \times 6 = 40 + 48 = 88$.

Exercício

(8) Para diminuir o emplacamento de carros roubados, um determinado país resolveu fazer um cadastro nacional, em que as placas são formadas com 3 letras e 4 algarismos, sendo que a primeira letra da placa determina um estado desse país. Considerando o alfabeto com 26 letras, o número máximo de carros que cada estado pode emplacar será

$$26 \times 26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 175.760.000$$

Exercícios Complementares: Probabilidade Condicional

Exercício

(1) Um experimento consiste em lançar um dado equilibrado duas vezes, independentemente. Dado que os dois números serão diferentes, qual é a probabilidade condicional de:

- (1.a) pelo menos um dos números ser 6
- (1.b) a soma dos números ser 8

(2) Sabe-se que de cada 5 pessoas de uma determinada comunidade, uma é portadora de um certo tipo de anemia. Se selecionarmos, ao acaso, 3 pessoas dessa comunidade, qual a probabilidade de pelo menos uma delas seja portadora daquele tipo de anemia?

Exercícios Complementares: Contagem

1) Sejam os eventos: A : os dois números são diferentes, B : pelo menos um dos números é 6 e C : a soma dos números é igual a 8. Temos que $P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{6}{36} = \frac{30}{36}$. Além disso, temos que:

1.a)

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P\{1,6\} + P\{2,6\} + ... + P\{6,5\}}{30/36} \\ &= \frac{10/36}{30/36} = 1/3 \end{aligned}$$

Exercícios Complementares: Contagem

1.b)

$$
\begin{aligned}
P(C|A) &= \frac{P(C \cap A)}{P(A)} = \frac{P\{2,6\} + P\{3,5\} + P\{6,2\} + P\{5,3\}}{30/36} \\
&= \frac{4/36}{30/36} = 2/15
\end{aligned}
$$

Exercícios Complementares: Contagem

2) Seja o evento A : pelo menos uma das 3 pessoas selecionadas é portadora do tipo de anemia em questão. Assim

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^3 = 0,488.$$

Exercícios Complementares: Probabilidade Condicional

Exercício

(3) 4 homens e 4 mulheres devem ocupar 8 lugares de um banco. Qual a probabilidade de que nunca fiquem lado a lado duas pessoas do mesmo sexo (evento A)?

(4) Durante o mês de novembro a probabilidade de chuva é de 0,3. O Brasil ganha o jogo em um dia com chuva com probabilidade de $0,4$, em dia sem chuva com probabilidade 0,6. Se o Brasil ganhou em novembro, qual é a probabilidade de que choveu nesse dia?

3) [HM][HM][HM][HM] ou [MH][MH][MH][MH] $=$ $4! + 4! = 24 + 24 = 48$. No total temos 8! possibilidades. Assumindo um espaço amostra equiprobabilístico, temos que $P(A) = \dfrac{48}{40320}$.

Exercícios Complementares: probabilidade condicional

4) Sejam os eventos: C : chove, G : Brasil ganha. Queremos calcular $P(C|G)$. Com efeito, temos que

$$P(C|G) = \frac{P(C \cap G)}{P(G)},$$

mas $P(C \cap G) = P(C)P(G|C) = 0,3 \times 0,4 = 0,12$ e

$$\begin{aligned} P(G) &= P(G \cap C) + P(C \cap C^c) = P(C)P(G|C) + P(C^c)P(G|C^c) \\ &= 0,3 \times 0,4 + 0,7 \times 0,6 = 0,12 + 0,42 = 0,54. \end{aligned}$$

Portanto $P(C|G) = \dfrac{0,12}{0,54} \approx 0,2222$

Exercícios Complementares: Probabilidade Condicional

Exercício

(5) Pedro quer enviar uma carta para Mariana. A probabilidade de que Pedro escreva a carta é 0,80. A probabilidade de que o correio não a perca é de 0,90. A probabilidade de que o carteiro a entregue é 0,90. Dado que Mariana não recebeu a carta, qual é a probabilidade condicional de que Pedro não a tenha escrito?

5) Defina os eventos: E : Pedro escreve a carta, C: o correio não perde a carta, Ca : o carteiro entrega a carta.
Do enunciado do problema, temos que P(E) = 0,80, $P(C|E) = 0,90$ e $P(Ca|E, C) = 0,90$. Defina ainda o evento R : Mariana recebe a carta.

Queremos calcular $P(E^c|R^c)$, ou seja

$$P(E^c|R^c) = \frac{P(E^c, R^c)}{P(R^c)}$$

5) Mas,

$$\begin{aligned} P(R^c) &= 1 - P(R) = 1 - P(E, C, Ca) \\ &= 1 - P(E)P(C|E)P(Ca|E, C) \\ &= 1 - 0,8 \times 0,9 \times 0,9 = 0,352. \end{aligned}$$

Além disso, $P(E^c, R^c) = P(E^c)P(R^c|E^c) = 0,20 \times 1 = 0,20.$
Logo

$$P(E^c|R^c) = \frac{0,20}{0,352} \approx 0,615.$$