Técnicas de Contagem

Podemos fazer permutações e combinações.

- *Permutações* são os arranjos de elementos em que se tem em conta a ordem com que são tomados. Com a permutação sabemos de quantas formas podemos obter uma amostra de tamanho n, de uma população com tamanho N.

$$ {}_{N}P_{n} = \frac{N!}{(N-n)!} $$

Técnicas de Contagem

- *Combinações* são arranjos que não consideram a ordem dos elementos. Se queremos ter amostras sem repetição, temos:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

$\binom{n}{r}$ também pode ser denotado por $C(n, r)$ ou C_r^n.

Podemos fazer combinações com elementos repetidos, também. Nesse caso, $C_r(n, k) = C(n + k - 1, k)$.

Técnicas de Contagem - Um Exemplo

Suponha que temos uma população com $N = 6$ elementos e queremos sortear amostras de tamanho 2. Vamos considerar as seguintes maneiras de sorteio:

1. Com ordem e repetição
2. Com ordem e sem repetição
3. Sem ordem e com repetição
4. Sem ordem e sem repetição
5. Só repetição

Técnicas de Contagem - Um Exemplo

Caso 1: Com ordem e com repetição é quando sorteamos, por exemplo, duas vezes seguidas. Temos $6 * 6 = 36$ possibilidades.

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Técnicas de Contagem - Um Exemplo

Caso 2: Se queremos a amostra com ordem e sem repetições, temos ${}_6P_4 = \frac{6!}{4!} = 30$ possibilidades.

	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)		(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)		(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)		(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)		(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	

Técnicas de Contagem - Um Exemplo

Caso 3: Se queremos a amostra sem ordem, mas com repetições, temos $C_r(6,2) = \binom{6+2-1}{2} = 21$ possibilidades.

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
		(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
			(4,4)	(4,5)	(4,6)
				(5,5)	(5,6)
					(6,6)

Técnicas de Contagem - Um Exemplo

Caso 4: Se queremos a amostra sem ordem e sem repetições, temos $C(6,2) = \binom{6}{2} = 15$ possibilidades.

(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
		(3,4)	(3,5)	(3,6)
			(4,5)	(4,6)
				(5,6)

Técnicas de Contagem - Um Exemplo

Caso 5: Se só queremos repetições, temos somente 6 possibilidades.

(1,1)					
	(2,2)				
		(3,3)			
			(4,4)		
				(5,5)	
					(6,6)

Exemplo

Um restaurante popular apresenta apenas dois tipos de refeições: salada completa ou um prato à base de carne. Considere que 20% dos fregueses do sexo masculino preferem a salada, 30% das mulheres escolhem carne, 75% dos fregueses são homens. Considere os seguintes eventos:

H: freguês é homem   **A**: prefere salada
M: freguês é mulher   **B**: prefere carne

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 122.

Probabilidade - Probabilidade condicional

Devemos "traduzir" os dados do enunciado em eventos:

(i) "20% *dos fregueses do sexo masculino preferem a salada*" diz que o evento $A|H$ tem probabilidade $P(A|H) = 0{,}20$. Observe que então $P(A^c|H) = P(B|H) = 0{,}80 = 1 - P(A|H)$, ou seja, 80% dos homens preferem carne.

(ii) De modo análogo, "30% *das mulheres escolhem carne*" diz que o evento $B|M$ tem probabilidade $P(B|M) = 0{,}30$.

(iii) "75% *dos fregueses são homens*" nos diz que o evento H tem $P(H) = 0{,}75$.

Probabilidade - Probabilidade condicional

Podemos colocar os dados em uma tabela, e completá-la evocando as seguintes propriedades:

(i) Se $P(A|H) = P(A \cap H)/P(H)$, então $P(A \cap H) = P(A|H)P(H)$. Isso quer dizer que a probabilidade da intersecção dos eventos "cliente gosta de salada" com "cliente é homem" tem probabilidade igual a 20%*75% $=$ 15%.

(ii) $P(A) = P(A|H)P(H) + P(A|M)P(M)$. Ou seja, $P(A) = 20\% * 75\% + 70\% * 25\% = 32{,}5\%$. A probabilidade de um cliente gostar de salada é de 32,5%.

Probabilidade - Probabilidade condicional

Completando a tabela...

	Salada	Carne	Total
Homem	15%	60%	75%
Mulher	17,5%	7,5%	25%
Total	32,5%	67,5%	

Probabilidade - Probabilidade condicional

Basta agora consultar a tabela:

(a) *Calcular* $P(H)$, $P(A|H)$ *e* $P(B|M)$
$P(H) = 75\%$, $P(A|H) = 20\%$ e $P(B|M) = 30\%$. Todas essas são probabilidades informadas no enunciado.

(b) *Calcular* $P(A \cap H)$ *e* $P(A \cup H)$
$P(A \cap H) = P(A|H)P(H) = 20\% * 75\% = 15\%$,
$P(A \cup H) = P(A) + P(H) - P(A \cap H) =$
$32{,}5\% + 75\% - 15\% = 62{,}5\%$

(c) *Calcular* $P(M|A)$

$$P(M|A) = P(A|M)\frac{P(M)}{P(A)} = 70\%\frac{25\%}{32{,}5\%} = 53{,}84\%.$$

Probabilidade - Probabilidade condicional

Exemplo

As probabilidades de três motoristas serem capazes de guiar até em casa com segurança, depois de beber, são de $1/3$, $1/4$ e $1/5$, respectivamente. Se decidirem guiar até em casa, depois de beber numa festa, qual a probabilidade de todos os três motoristas sofrerem acidentes? Qual a probabilidade de pelo menos um dos motoristas guiar até em casa a salvo?
Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5^a edição, pág 122.

Probabilidade - Probabilidade condicional

Considere os eventos:

A: Primeiro Motorista sofre acidente
B: Segundo Motorista sofre acidente
C: Terceiro Motorista sofre acidente

Com P(A) $= 2/3$, P(B) $= 3/4$ e P(C) $= 4/5$, respectivamente.
Assuma também que eles são independentes entre si.
Então P(todos sofrerem acidentes) $= P(A \cap B \cap C)$, mas pela independência, $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$ que é igual a $2/5$.

Probabilidade - Probabilidade condicional

Finalmente, qual a probabilidade de pelo menos um deles não sofrer acidente? Seja E o evento *todos os três sofrem acidente*. Então *pelo menos um não sofre acidente* é E^c. Além disso, $E = A \cap B \cap C$, e sabemos que $P(E) = 2/5$. Portanto $P(E^c) = 1 - P(E) = 1 - 2/5 = 3/5$.

Probabilidade - Probabilidade condicional

Exemplo

Duas lâmpadas queimadas foram misturadas acidentalmente com seis lâmpadas boas. Se vamos testando as lâmpadas, uma por uma, até encontrar duas defeituosas, qual é a probabilidade de que a última defeituosa seja encontrada no quarto teste?
Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 122.

Probabilidade - Probabilidade condicional

Seja Q uma lâmpada queimada e B uma lâmpada boa. Sabendo que são duas queimadas, encerramos os testes quando a segunda for encontrada. Então, o nosso espaço amostral é
$\Omega = \{QQ, QBQ, BQQ, QBBQ, BQBQ, BBQQ,$
$QBBBQ, BQBBQ, BBQBQ, BBBQQ, \ldots, BBBBBBQQ\}$

O evento *última defeituosa encontrada no quarto teste* corresponde aos eventos $\{QBBQ, BQBQ, BBQQ\}$.

Probabilidade - Probabilidade condicional

$P(QBBQ$ ou $BQBQ$ ou $BBQQ) = P(QBBQ \cup BQBQ \cup BBQQ) = P(QBBQ) + P(BQBQ) + P(BBQQ)$ pois os eventos são disjuntos

$$\mathrm{P(QBBQ)} = \frac{2}{8}\frac{6}{7}\frac{5}{6}\frac{1}{5} = \frac{1}{28}$$

$$\mathrm{P(BQBQ)} = \frac{6}{8}\frac{2}{7}\frac{5}{6}\frac{1}{5} = \frac{1}{28}$$

$$\mathrm{P(BBQQ)} = \frac{6}{8}\frac{5}{7}\frac{2}{6}\frac{1}{5} = \frac{1}{28}$$

Ou seja, P(*última defeituosa encontrada no quarto teste*) $= \dfrac{3}{28}$