Técnicas de Contagem

Podemos fazer permutações e combinações.

- *Permutações* são os arranjos de elementos em que se considera a ordem com que são construídos. Este conceito nos permite saber de quantas formas podemos obter uma amostra de tamanho n, de uma população com tamanho N.

$$
{}_N P_n = \frac{N!}{(N-n)!}.
$$

- *Combinações* são arranjos que não consideram a ordem dos elementos. Se queremos ter computar as amostras sem repetição, teremos que:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

$\binom{n}{r}$ também pode ser denotado por $C(n, r)$ ou C_r^n.

Podemos considerar combinações com elementos repetidos, também. Nesse caso, $C_r(n, k) = C(n + k - 1, k)$.

Técnicas de Contagem - Um Exemplo

Suponha que temos uma população com $N = 6$ elementos e queremos sortear amostras de tamanho 2. Vamos considerar os seguintes tipos de sorteio:

1. Com ordem e repetição.
2. Com ordem e sem repetição.
3. Sem ordem e com repetição.
4. Sem ordem e sem repetição.
5. Só repetição.

Técnicas de Contagem - Um Exemplo

Caso 1: Com ordem e com repetição é quando sorteamos, por exemplo, duas vezes seguidas. Temos $6 \times 6 = 36$ possibilidades, ou seja:

$$\begin{array}{cccccc}
(1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\
(2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\
(3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\
(4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\
(5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\
(6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6)
\end{array}$$

Técnicas de Contagem - Um Exemplo

Caso 2: Se queremos considerar uma amostra ordenada (a ordem importa) e sem repetições, temos ${}_6P_4 = \frac{6!}{4!} = 30$ possibilidades, ou seja:

	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)		(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)		(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)		(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)		(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	

Técnicas de Contagem - Um Exemplo

Caso 3: Se estamos interessados na amostra sem ordem, mas com repetições, teremos $C_r(6,2) = \binom{6+2-1}{2} = 21$ possibilidades, ou seja:

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
		(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
			(4,4)	(4,5)	(4,6)
				(5,5)	(5,6)
					(6,6)

Técnicas de Contagem - Um Exemplo

Caso 4: Se temos interesse na amostra sem ordem e sem repetições, teremos $C(6,2) = \binom{6}{2} = 15$ possibilidades, ou seja:

(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
		(3,4)	(3,5)	(3,6)
			(4,5)	(4,6)
				(5,6)

Técnicas de Contagem - Um Exemplo

Caso 5: Se só queremos os elementos repetidos, temos somente 6 possibilidades, ou seja:

(1,1)
(2,2)
(3,3)
(4,4)
(5,5)
(6,6)

Probabilidade - Probabilidade condicional

Exemplo

Um restaurante popular apresenta apenas dois tipos de refeições: salada completa ou um prato à base de carne. Considere que 20% dos fregueses do sexo masculino preferem a salada, 30% das mulheres escolhem carne, 75% dos fregueses são homens. Considere os seguintes eventos:

H: freguês é homem	**A**: prefere salada
M: freguês é mulher	**B**: prefere carne

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 122.

Probabilidade - Probabilidade condicional

Devemos "traduzir" os dados do enunciado em termos de eventos:

(i) "20% *dos fregueses do sexo masculino preferem a salada*" inidca que $P(A|H) = 0{,}20$. Observe que então $P(A^c|H) = P(B|H) = 0{,}80 = 1 - P(A|H)$, ou seja, 80% dos homens preferem carne.

(ii) De modo análogo, "30% *das mulheres escolhem carne*" indica que $P(B|M) = 0{,}30$.

(iii) "75% *dos fregueses são homens*" nos diz que $P(H) = 0{,}75$.

Probabilidade - Probabilidade condicional

Podemos colocar os dados em uma tabela, e completá-la através das seguintes propriedades:

(i) Se $P(A|H) = P(A \cap H)/P(H)$, então $P(A \cap H) = P(A|H)P(H)$. Isso quer dizer que a probabilidade da intersecção dos eventos "cliente gosta de salada" com "cliente é homem" é igual a $20\% \times 75\% = 15\%$.

(ii) $P(A) = P(A|H)P(H) + P(A|M)P(M)$. Ou seja, $P(A) = 20\% \times 75\% + 70\% \times 25\% = 32{,}5\%$. A probabilidade de um cliente gostar de salada é de 32,5%.

Probabilidade - Probabilidade condicional

Completando a tabela...

	Salada	Carne	Total
Homem	15%	60%	75%
Mulher	17,5%	7,5%	25%
Total	32,5%	67,5%	100%

Probabilidade - Probabilidade condicional

Basta agora consultar a tabela:

(a) *Calcular $P(H)$, $P(A|H)$ e $P(B|M)$*
$P(H) = 75\%$, $P(A|H) = 20\%$ e $P(B|M) = 30\%$. Todas essas são probabilidades informadas no enunciado.

(b) *Calcular $P(A \cap H)$ e $P(A \cup H)$*
$P(A \cap H) = P(A|H)P(H) = 20\% * 75\% = 15\%$,
$P(A \cup H) = P(A) + P(H) - P(A \cap H) =$
$32{,}5\% + 75\% - 15\% = 62{,}5\%$.

(c) *Calcular $P(M|A)$*

$$P(M|A) = P(A|M)\frac{P(M)}{P(A)} = 70\%\frac{25\%}{32{,}5\%} = 53{,}84\%.$$

Probabilidade - Probabilidade condicional

Exemplo

As probabilidades de três motoristas serem capazes de guiar até em casa com segurança, depois de beber, são de $1/3$, $1/4$ e $1/5$, respectivamente. Se decidirem guiar até em casa, depois de beber numa festa, qual a probabilidade de todos os três motoristas sofrerem acidentes? Qual a probabilidade de pelo menos um dos motoristas guiar até em casa a salvo? OBS: Lembre-se, quando beber, não dirija.
Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 122.

Probabilidade - Probabilidade condicional

Considere os eventos:

A: Primeiro Motorista sofre acidente.
B: Segundo Motorista sofre acidente.
C: Terceiro Motorista sofre acidente.

- Em que P(A) = 2/3, P(B) = 3/4 e P(C) = 4/5, respectivamente.
- Assuma também que tais eventos são independentes entre si.
- Então P(todos sofrerem acidentes) = $P(A \cap B \cap C)$. Contudo, pela independência, $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$ que é igual a 2/5.

Probabilidade - Probabilidade condicional

- Finalmente, qual a probabilidade de pelo menos um deles não sofrer acidente?
- Seja E o evento *todos os três sofrem acidente*.
- Então o evento *pelo menos um não sofre acidente* corresponde a E^c.
- Além disso, $E = A \cap B \cap C$, e sabemos que $P(E) = 2/5$.
- Portanto $P(E^c) = 1 - P(E) = 1 - 2/5 = 3/5$.

Probabilidade - Probabilidade condicional

Exemplo

Duas lâmpadas queimadas foram misturadas acidentalmente com seis lâmpadas boas. Se vamos testando as lâmpadas, uma por uma, até encontrar duas defeituosas, qual é a probabilidade de que a última defeituosa seja encontrada no quarto teste?
Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 122.

Probabilidade - Probabilidade condicional

Seja Q uma lâmpada queimada e B uma lâmpada boa. Sabendo que são duas queimadas, encerramos os testes quando a segunda for encontrada. Então, o nosso espaço amostral é
$\Omega = \{QQ, QBQ, BQQ, QBBQ, BQBQ, BBQQ,$
$QBBBQ, BQBBQ, BBQBQ, BBBQQ, \ldots, BBBBBBQQ\}$

O evento *última defeituosa ser encontrada no quarto teste* corresponde aos eventos $\{QBBQ, BQBQ, BBQQ\}$.

Probabilidade - Probabilidade condicional

$P(QBBQ \text{ ou } BQBQ \text{ ou } BBQQ) = P(QBBQ \cup BQBQ \cup BBQQ) = P(QBBQ) + P(BQBQ) + P(BBQQ)$ pois os eventos são disjuntos.
Além disso:

$$\mathrm{P(QBBQ)} = \frac{2}{8}\frac{6}{7}\frac{5}{6}\frac{1}{5} = \frac{1}{28}$$

$$\mathrm{P(BQBQ)} = \frac{6}{8}\frac{2}{7}\frac{5}{6}\frac{1}{5} = \frac{1}{28}$$

$$\mathrm{P(BBQQ)} = \frac{6}{8}\frac{5}{7}\frac{2}{6}\frac{1}{5} = \frac{1}{28}$$

Ou seja, $\mathrm{P}(\textit{última defeituosa encontrada no quarto teste}) = \dfrac{3}{28}$