Probabilidade - Introdução

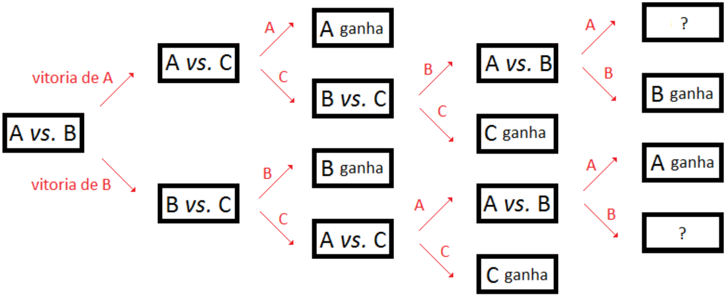
Exemplo

Três jogadores **A**, **B** e **C** disputam um torneio de tênis. Inicialmente, **A** joga com **B** e o vencedor joga com **C**, e assim por diante. O torneio termina quando um jogador ganha duas vezes seguidas ou quando são disputadas, ao todo, quatro partidas. Quais são os resultados possíveis do torneio?

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5^a edição, pág 105.

Probabilidade - Introdução

Considere a árvore de possibilidades:



Probabilidade - Introdução

Com a ajuda da árvore de possibilidades, podemos dizer que o espaço amostral (Ω) associado ao experimento aleatório, é composto pelos eventos : AA, BB, ACC, BCC, ACBA, ACBB, BCAA e BCAB.

Ou seja

$$\Omega = \{AA, BB, ACC, BCC, ACBA, ACBB, BCAA, BCAB\}$$

Probabilidade - Introdução

Exemplo

Uma moeda e um dado são lançados. Dê o espaço amostral do experimento e depois represente-o como produto cartesiano dos dois espaços amostrais, correspondente aos experimentos considerados individualmente.
Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 106.

Probabilidade - Introdução

O *espaço amostral* Ω consiste, no caso discreto, da enumeração de todos os resultados possíveis do experimento em questão.

O experimento *jogar uma moeda* tem dois resultados possíveis: cara (C) e coroa $(\bar{C})$. Logo, o espaço amostral é $\Omega_1 = \{C, \bar{C}\}$.

Probabilidade - Introdução

O experimento *jogar um dado* tem seis resultados possíveis: 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Logo, o espaço amostral é $\Omega_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

O produto cartesiano $\Omega_1 \times \Omega_2$ é o espaço amostral do experimento *jogar uma moeda e um dado*, ou seja,

$$\begin{aligned}\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 = & \{(C,1),(C,2),(C,3),(C,4),(C,5),(C,6),\\ & (\bar{C},1),(\bar{C},2),(\bar{C},3),(\bar{C},4),(\bar{C},5),(\bar{C},6)\}\end{aligned}$$

Probabilidade - Introdução

Exercício

Defina o espaço amostral dos seguintes experimentos aleatórios:

(i) Numa linha de produção, conta-se o número de peças defeituosas num intervalo de uma hora.

(ii) Investigam-se famílias com três crianças, anotando-se a configuração segundo o sexo.

(iii) Numa entrevista telefônica com 250 assinantes, anota-se se o proprietário tem ou não máquina de secar roupa.

(iv) Mede-se a duração de lâmpadas, deixando-as acesas até que se queimem.

Probabilidade - Introdução

Exercício

Defina o espaço amostral dos seguintes experimentos aleatórios (continuação):

(v) De um grupo de cinco pessoas (A,B,C,D,E), sorteiam-se duas, uma após a outra, com reposição, e anota-se a configuração tomada.

(vi) Mesmo que (v), mas sem reposição.

(vii) Mesmo que (v), mas os dois selecionados simultaneamente.

Probabilidade - Introdução

Exercício

Respostas:

(i) $\Omega = \{0, 1, 2, ...\} = \mathcal{N}$.

(ii) $\Omega = \{(M, M, M), (M, M, F), (M, F, M), (F, M, M), (M, F, F), (F, M, F), (F, F, M), (F, F, F)\}$.

(iii) $\Omega = \{0, 1, 2, ..., 250\}$.

(iv) $\Omega = \{t : t \in \mathcal{R}^+\} = (0, \infty)$.

(v) $\Omega = \{(A, A), (B, B), (C, C), (D, D), (E, E), (A, B), (A, C), (A, D), (A, E), (B, A), (B, C), (B, D), (B, E), (C, A), (C, B), (C, D), (C, E), (D, A), (D, B), (D, C), (D, E), (E, A), (E, B), (E, C), (E, D)\}$.

Exercício

Respostas:

(vi) $\Omega = \{(A, B), (A, C), (A, D), (A, E), (B, A), (B, C), (B, D), (B, E), (C, A), (C, B), (C, D), (C, E), (D, A), (D, B), (D, C), (D, E), (E, A), (E, B), (E, C), (E, D)\}$.

(vii) $\Omega = \{(A, B), (A, C), (A, D), (A, E), (B, C), (B, D), (B, E), (C, D), (C, E), (D, E)\}$.

Probabilidade - Algumas Propriedades

Considere novamente o jogo de tênis entre **A**, **B** e **C**. Temos que $\Omega = \{AA, BB, ACC, BCC, ACBA, ACBB, BCAA, BCAB\}$, e $P(AA) = P(A)P(A) = (1/2)(1/2) = 1/4$, por exemplo. Note que $P(AA) = P(A \cap A)$ e os resultados das partidas são probabilisticamente independentes.

(a) *Mostre que a soma das probabilidades dos pontos do espaço amostral é 1.*

$$P(AA) + P(BB) + P(ACC) + P(BCC) + P(ACBA) + P(ACBB) + P(BCAA) + P(BCAB) =$$
$$= 1/4 + 1/4 + 1/8 + 1/8 + 1/16 + 1/16 + 1/16 + 1/16 = 1$$

Probabilidade - Algumas Propriedades

(b) *Qual a probabilidade de que A vença? Qual a probabilidade de que B vença?*
P(A vencer) $= P(AA) + P(BCAA) = 1/4 + 1/16 = 5/16 =$ 0,3125.
De modo análogo, P(B vencer) $= P(BB) + P(ACBB) =$ $1/4 + 1/16 = 5/16 =$ 0,3125.

(c) *Qual a probabilidade de que não haja decisão?*
P(não haver decisão) $= P(ACBA) + P(BCAB) = 2/16 =$ 0,125.

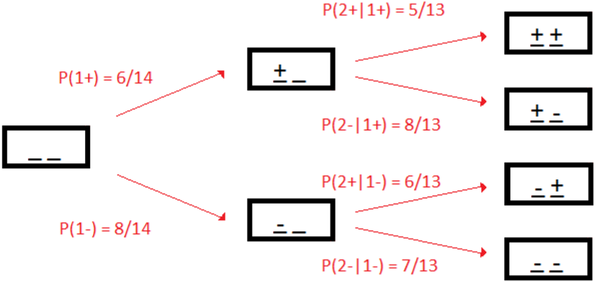
Probabilidade - Algumas Propriedades

Exemplo

Dentre seis números positivos e oito negativos, dois números são escolhidos ao acaso (sem reposição) e multiplicados. Qual a probabilidade de que o produto seja positivo?
Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 110.

Probabilidade - Algumas Propriedades

Considere a seguinte árvore de possibilidades:



Probabilidade - Algumas Propriedades

Com a ajuda do diagrama, e lembrando de que, por exemplo, $P(++) = P(+\cap+)$, observamos que:

$$P(++) = \frac{6}{14}\frac{5}{13} = \frac{15}{91},\ P(+-) = \frac{6}{14}\frac{8}{13} = \frac{24}{91}$$

$$P(-+) = \frac{8}{14}\frac{6}{13} = \frac{24}{91},\ P(--) = \frac{8}{14}\frac{7}{13} = \frac{4}{13}$$

Como queremos que o produto dos dois números seja positivo, nos interessa os eventos $++$ ou $--$. Então, temos uma probabilidade igual a $43/91$, ou aproximadamente 47,25%.

Probabilidade - Distribuições Bivariadas

Exemplo

Considere um estudo com 19.476 homens de 50 anos ou mais, escolhidos de maneira aleatória e independente uns dos outros, que foram submetidos a dois testes de rastreamento de câncer de próstata.

- *PSA:* Antígeno prostático específico.
- *DRE:* Toque retal (Digital Rectal Examination).
- *Confirmação:* biópsia.

Probabilidade - Distribuições Bivariadas

As tabelas são para homens onde posteriormente foi verificado o câncer (através de biópsia) e sem câncer:

Pacientes com câncer

	DRE+	DRE-	
PSA+	189	292	481
PSA-	145	1255	1400
	334	1547	1881

Pacientes sem câncer

	DRE+	DRE-	
PSA+	141	755	896
PSA-	1002	15697	16699
	1143	16452	17595

Probabilidade - Distribuições Bivariadas

A tabela a seguir é para todos os indivíduos (com e sem câncer):

Total

	DRE+	DRE-	
PSA+	330	1047	1377
PSA-	1147	16952	18099
	1477	17999	19476

Exemplo

Definamos os seguintes eventos associados ao experimento:

$$\begin{array}{lll} \text{A} = \text{DRE}+ & \text{B} = \text{PSA}+ & \text{C} = \text{Paciente tem câncer} \\ \text{A}^c = \text{DRE-} & \text{B}^c = \text{PSA-} & \text{C}^c = \text{Paciente não tem câncer} \end{array}$$

Na literatura, $P(A|C)$ é chamado de *sensibilidade* (probabilidade do teste acusar câncer dado que, de fato, o indivíduo tem câncer) do DRE, e $P(A^c|C^c)$ é chadado de *especificidade* (probabilidade do teste acusar que não tem câncer dado que, de fato, o indivíduo não tem câncer) do DRE. Analogamente $P(B|C)$ e $P(B^c|C^c)$ são a sensibilidade e especificidade do PSA.

$P(C) = 1881/19476 = 0{,}0966$ é a *prevalência* do câncer de próstata em homens com 50 anos ou mais de idade.

Probabilidade - Distribuições Bivariadas

Exercício

Se sortearmos um indivíduo da amostra, calcule as probabilidades dos seguintes eventos:

$$
\begin{array}{lll}
P(A|C) & P(A \cap B|C) & P(A \cup B|C) \\
P(A|C^c) & P(A \cap B|C^c) & P(A \cup B|C^c) \\
P(A) & P(A \cap B) & P(A \cup B)
\end{array}
$$

Resultados

Se aplicássemos as fórmulas e usássemos propriedades de conjuntos, teríamos (veremos mais adiante, a definição de probabilidade condicional)

- $P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = ?.$
- $P(A \cap B|C) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(C)} = ?.$
- $P(A \cup B|C) = \frac{P((A \cup B) \cap C)}{P(C)} = \frac{P((A \cap C) \cup (B \cap C))}{P(C)} = \frac{P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)}{P(C)} = ?.$
- $P(A|C^c) = \frac{P(A \cap C^c)}{P(C^c)} = ?.$

Resultados

Se aplicássemos as fórmulas e usássemos propriedades de conjuntos, teríamos

- $P(A \cap B | C^c) = \frac{P(A \cap B \cap C^c)}{P(C^c)} = ?.$
- $P(A \cup B | C^c) = \frac{P((A \cup B) \cap C^c)}{P(C^c)} = \frac{P((A \cap C^c) \cup (B \cap C^c))}{P(C^c)} = \frac{P(A \cap C^c) + P(B \cap C^c) - P(A \cap B \cap C^c)}{P(C^c)} = ?.$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = ?.$
- Exercício: Calcular as quantidades acima.

Resultados: usando as tabelas

- $P(A|C) = \dfrac{334}{1881} \approx 0,177$ (Tabela 1).
- $P(A \cap B|C) = \dfrac{189}{1881} \approx 0,100$ (Tabela 1).
- $P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C) - P(A \cap B|C) = \dfrac{334}{1881} + \dfrac{481}{1881} - \dfrac{189}{1881} = \dfrac{626}{1881} \approx 0,333$ (Tabela 1).
- $P(A|C^c) = \dfrac{1143}{17595} \approx 0,065$ (Tabela 2).

Resultados: usando as tabelas

- $P(A \cap B | C^c) = \dfrac{141}{17595} \approx 0,008$ (Tabela 2).
- $P(A \cup B | C^c) = P(A|C^c) + P(B|C^c) - P(A \cap B|C^c) = \dfrac{1143}{17595} + \dfrac{896}{17595} - \dfrac{141}{17595} = \dfrac{2180}{17595} \approx 0,124$ (Tabela 2).
- $P(A) = \dfrac{1377}{19476} =\approx 0,071$ (Tabela 3).
- $P(A \cap B) = \dfrac{330}{19476} \approx 0,017$ (Tabela 3).
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \dfrac{1377}{19476} + \dfrac{896}{19476} - \dfrac{330}{19476} = \dfrac{1943}{19476} \approx 0,100$ (Tabela 3).