Teste para a variância

Exemplo

Uma das maneiras de manter sob controle a qualidade de um produto é controlar sua variabilidade. Uma máquina de encher pacotes de café está regulada para enchê-los com média 500g e desvio padrão de 10g. O peso de cada pacote X segue uma distribuição $N(\mu, \sigma^2)$. Colheu-se uma amostra de 16 pacotes e observou-se uma variância de $S^2 = 169g^2$. Com esse resultado, você diria que a máquina está desregulada com relação à variância?

Fonte: Bussab & Morettin, Estatística Básica 6ª edição, pág 353.

Teste para a variância

No problema em questão, estamos interessados em testar

$$H_0 : \sigma^2 = 100$$
$$H_1 : \sigma^2 \neq 100$$

Para testar hipóteses do tipo

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$$
$$H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

sob a suposição de que $X_i \overset{\text{iid}}{\sim} N(\mu, \sigma^2), i = 1, \ldots, n$, utilizamos a seguinte estatística do teste, sob H_0,

$$\mathcal{X}^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \mathcal{X}^2_{(n-1)}$$

.

Teste para a variância

Como temos uma hipótese bilateral, a região crítica será da forma $RC = (0, \mathcal{X}_1^2] \cup [\mathcal{X}_2^2, \infty)$, tal que

$$P(\mathcal{X}^2 \in RC|H_0) = P(0 < \mathcal{X}^2 < \mathcal{X}_1^2 \quad \text{ou} \quad \mathcal{X}^2 > \mathcal{X}_2^2) = \alpha,$$

sendo α o nível de significância do teste, fixado a priori.

Observado o valor s_0^2 da estatística S^2, obteremos o valor $\mathcal{X}_0^2 = \dfrac{(n-1)s_0^2}{\sigma_0^2}$. Se $\mathcal{X}_0^2 \in RC$, rejeita-se H_0, caso contrário, não rejeita-se H_0.

Teste para a variância

Voltando ao exemplo, temos que $n = 16$. Fixado o nível de significância α igual a $0,05$, temos que a região crítica é dada por

$RC = \{\mathcal{X}^2 : 0 \leq \mathcal{X}^2 \leq 6,262 \quad \text{ou} \quad \mathcal{X}^2 \geq 27,488\}$.

O valor observado da estatística é

$$\mathcal{X}_0^2 = \frac{(n-1)s_0^2}{\sigma_0^2} = \frac{(15)(169)}{100} = 25,35.$$

Uma vez que $\mathcal{X}_0^2 \notin RC$, não rejeita-se H_0, ou seja, a máquina parece estar sobre controle quanto à variância.

Teste para diferença de médias

Exemplo

Dois tipos diferentes de tecido devem ser comparados. Uma máquina de testes Martindale pode comparar duas amostras ao mesmo tempo. O peso (em miligramas) para sete experimentos foram:

Tecido	1	2	3	4	5	6	7
A	36	26	31	38	28	20	37
B	39	27	35	42	31	39	22

Teste se um tecido é mais pesado que o outro a um nível de significância de 5%. Admita que a variância é a mesma, e igual a 49. Quais outras hipóteses são necessárias para o teste?

Adaptado de: Profa. Nancy Garcia, Notas de aula.

Teste para diferença de médias

Os tecidos do tipo A tem uma média amostral igual a aproximadamente 30.85. Já os tecidos do tipo B têm média amostral de 33.57. O desvio padrão populacional é igual a 7, enquanto os desvios-padrão amostrais são 6.64 e 7.25, respectivamente.

Devemos assumir que $X_A \sim N(\mu_A, \sigma^2)$ e $X_B \sim N(\mu_B, \sigma^2)$, e além disso que X_A e X_B são independentes, onde X_i é o peso amostrado do tecido de tipo i, em miligramas. Queremos testar a hipótese $H_0 : \mu_A = \mu_B$, contra a alternativa $H_1 : \mu_A \neq \mu_B$.

Teste para diferença de médias

Como a variância é conhecida, a estatística do teste é dada por

$$T = \frac{\bar{X}_A - \bar{X}_B}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}}}$$

Se válida a hipótese nula, temos que $T \sim N(0,1)$. Note agora que a hipótese alternativa é do tipo $\neq$, então o teste é bicaudal. Isso significa que a região crítica, ou seja, a região onde rejeitamos a hipótese nula, é do tipo $|T| > c$, onde T é a estatística do teste.

Teste para diferença de médias

Podemos determinar a constante c através da significância fixada. Para $\alpha = 0.05$, queremos que

$$P(T > c) + P(T < -c) = 0.05,$$

isto é, a probabilidade de rejeitarmos a hipótese nula, quando ela for verdadeira, seja igual a 0.05. Note agora que quando H_0 é verdadeira, $T \sim N(0,1)$, então queremos achar c tal que

$$1 - \Phi(c) + \Phi(-c) = 0.05$$

Teste para diferença de médias

Ou simplesmente que

$$\Phi(c) = \frac{1.95}{2} = 0.975.$$

Tome a tabela da curva Normal, e observe que o valor que acumula 0.975 é o quantil 1.96 (dica para ler essa tabela: as células são as probabilidades, enquanto as margens representam a unidade e a primeira casa decimal {na vertical} e a segunda casa decimal {na horizontal }) de z_α.

Tabela distribuição acumulada da Normal padrão

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt, \;\; Z \sim N(0,1)$$

Turmas coordenadas ME203, ME180, ME480 e ME414

UNICAMP, 1º semestre 2010

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	[illegible]	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	[illegible]	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	[illegible]	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	[illegible]	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	[illegible]	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	[illegible]	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	[illegible]	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	[illegible]	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	[illegible]	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	[illegible]	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	[illegible]	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	[illegible]	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	[illegible]	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	[illegible]	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	[illegible]	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	[illegible]	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	[illegible]	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	[illegible]	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	$\boxed{0.9750}$	0.9756	0.9761	0.9767

Teste para diferença de médias

Observada a tabela, podemos concluir que o valor c tal que a região crítica $|T| > c$ tem probabilidade igual a 5%, quando H_0 é verdadeira, é $c = 1.96$. Portanto, para concluirmos o teste, temos que

$$\left| T = \frac{\bar{X}_A - \bar{X}_B}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}}} \right| = \left| \frac{30.85 - 33.57}{7\sqrt{\frac{1}{7} + \frac{1}{7}}} \right| = 0.726$$

E como $0.726 < 1.96$, **não** rejeitamos a hipótese que os dois tipos de tecido tenham o mesmo peso, a 5% de significância.

Teste T, duas populações normais

Exemplo

Num estudo comparativo do tempo médio de adaptação, uma amostra aleatória, de 50 homens e 50 mulheres de um grande complexo industrial, produziu os seguintes resultados:

	Homens	Mulheres
Média	3,2 anos	3,7 anos
Desvio padrão	0,8 anos	0,9 anos

Que conclusões você poderia tirar para a população dessa indústria? Quais suposições você deve fazer? *Fonte: Morettin & Bussab*, Estatística Básica 5ª edição, pág 365.

Teste T, duas populações normais

Queremos determinar se há diferença entre o tempo de adaptação de homens e mulheres. Devemos supor que

- O tempo de adaptação tem distribuição Normal.
- A amostra foi colhida de maneira independente.
- As variâncias populacionais, ainda que desconhecidas, sejam as mesmas.

Queremos testar a hipótese que as médias são iguais, isto é, $H_0 : \mu_H = \mu_M$, ou equivalentemente, $H_0 : \mu_H - \mu_M = 0$. Note que as suposições acima podem (ou melhor, *devem*) todas ser verificadas através de testes de hipótese específicos. Contudo, verificar tais suposições foge do escopo introdutório do curso.

Teste T, duas populações normais

O teste T com variâncias iguais mas desconhecidas é baseado na seguinte estatística:

$$T = \frac{\bar{X}_H - \bar{X}_M}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_H} + \frac{1}{n_M}}} \sim t_{(n_H+n_M-2)}$$

onde S_p, o desvio padrão comum (*pooled standard deviation*) é dado por

$$S_p^2 = \frac{(n_H - 1)S_H^2 + (n_M - 1)S_M^2}{n_H + n_M - 2}$$

No problema apresentado, $s_p = 0.8514$.

Teste T, duas populações normais

A estatística observada foi

$$t_0 = \frac{3.2 - 3.7}{0.8514\sqrt{\frac{1}{50} + \frac{1}{50}}} = -2.9363.$$

Note que a região crítica agora é dada por

$$RC(0.05) = \{[T < -1.984] \cup [T > 1.984]\}$$

onde $q = -1.984$ é o ponto tal que $P([T < q]) = 0.025$, etc.
E como $-2.9363 \in RC$, rejeitamos a hipótese nula. Ou seja, há evidência em favor da diferença entre o tempo médio de adaptação dos homens e das mulheres.

Teste para diferença de proporções

Exemplo

Um ensaio clínico é realizado para avaliar um novo tipo de tratamento contra uma doença e comparar os resultados com aqueles obtidos usando o tratamento tradicional. Dos 50 pacientes tratados com o tratamento novo, 36 se curaram e dos 45 tratados com o antigo 29 se curaram. Faça as comparações necessárias usando uma significância de 99%. Confira os resultados com intervalos de confiança.

Teste para diferença de proporções

A proporção de curados com o tratamento novo é de $p_{novo} = 36/50 = 0.72$. Já o tratamento antigo curou $p_{antigo} = 29/45 = 0.644$.

Queremos testar a hipótese que $H_0 : p_n = p_a$, contra uma hipótese alternativa $H_1 : p_n > p_a$. A estatística para testes de diferença de proporções é dada por

$$T = \frac{\hat{p}_n - \hat{p}_a}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_n} + \frac{1}{n_a}\right)}}$$

onde $\hat{p}$ é a proporção total de indivíduos curados, neste caso $(36+29)/(50+45) \approx 0.68$.

Teste para diferença de proporções

A estatística observada foi

$$t_0 = \frac{0.72 - 0.644}{\sqrt{0.68(1-0.68)(\frac{1}{50}+\frac{1}{45})}} = 0.793$$

A distribuição da estatística sob H_0 é $N(0,1)$. O quantil tal que $P(Z > q) = 0.01$ é dado por 2.33, então a região crítica do teste é dado por:

$$RC(\alpha = 0.01) = \{Z > 2.367\}$$

Como o valor observado é 0.793, não temos evidência para rejeitar a hipótese nula. Então, o novo tratamento não é significativamente diferente do anterior.

Teste para diferença de proporções

Note que o intervalo de confiança para cada proporção é dado por

$$\text{IC}(p_k, \alpha) = \hat{p}_k \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_k(1-\hat{p}_k)}{n_k}}, \quad k = \text{novo, antigo}$$

E para a difenrença, temos simplesmente

$$\text{IC}(p_n - p_a, \alpha) = \hat{p}_n - \hat{p}_a \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_n(1-\hat{p}_n)}{n_n} + \frac{\hat{p}_a(1-\hat{p}_a)}{n_a}}$$

Teste para diferença de proporções

Ou, aplicando os valores informados no exercício, e tomando $\alpha = 0.99$, e logo $z_{0.995} = 2.326$, temos

$$\text{IC}(p_n - p_a, 0.99) = 0.72 - 0.64 \pm 2.326\sqrt{\frac{0.72(1-0.72)}{50} + \frac{0.64(1-0.64)}{45}}$$

$$\text{IC}(p_n - p_a, 0.99) = (-0.146; 0.298)$$

E como $0 \in \text{IC}(p_n - p_a, 0.99)$, não podemos rejeitar a hipótese que $p_n - p_a$. Note que o intervalo de confiança para a diferença de proporções é um teste *aproximado*, que pode inclusive dar resultados diferentes que o teste de hipótese, sendo este preferível sempre que possível.

Teste T para diferença de médias, com variâncias diferentes

Exemplo

Para investigar a influência da opção profissional sobre o salário inicial de recém-formados, investigaram-se dois grupos de profissionais: um de liberais em geral e outro de formados em Administração de Empresas. Com os resultados abaixo, expressos em salários mínimos, quais seriam suas conclusões?

Liberais	6,6	10,3	10,8	12,9	9,2	12,3	7,0	
Admin.	8,1	9,8	8,7	10,0	10,2	8,2	8,7	10,1

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 366.

Teste T para diferença de médias, com variâncias diferentes

Temos duas amostras de populações independentes. Vamos assumir que os salários tem distribuição normal, com média μ_L e variância σ_L^2 para os profissionais liberais, e média μ_A e variância σ_A^2 para os administradores.

Queremos testar a hipótese $H_0 : \mu_L = \mu_A$. Mas antes de tudo, queremos determinar se não rejeitamos a hipótese secundária $H_0' : \sigma_L^2 = \sigma_A^2$, para decidirmos qual tipo de teste T utilizaremos, pois a variância é desconhecida.

Teste T para diferença de médias, com variâncias diferentes

Observe que a tabela nos dá os seguintes valores: $\bar{x}_L = 9.87$, $\bar{x}_A = 9.22$, $s_L = 2.43$ e $s_A = 0.88$, com $n_L = 7$ e $n_A = 8$.

O teste F para igualdade de variâncias é baseado na estatística $W = S_L^2/S_A^2 \sim F(n_L - 1, n_A - 1)$. Temos que $W = 7.513$. A região crítica do teste, a 5% de significância, é $RC(0.05) = \{[W < 0.175] \cup [W > 5.119]\}$. Novamente, os pontos (0.175,5.119) são tais que $F_W(0.175; 6, 7) = 0.025$ e $F_W(5.119; 6, 7) = 0.975$, F_W é a função de distribuição acumulada da F, com 6 e 7 graus de liberdade.

Teste T para diferença de médias, com variâncias diferentes

A estatística do teste T com variâncias desconhecidas e desiguais é dada por

$$T = \frac{\bar{X}_L - \bar{X}_A}{\sqrt{S_L^2/n_L + S_A^2/n_A}}$$

com ν graus de liberdade, dados por

$$\nu = \frac{(C + D)^2}{C^2/(n_L - 1) + D^2/(n_A - 1)}$$

onde $C = s_L^2/n_L$ e $D = s_A^2/n_A$. Temos que $C = 0.84$ e $D = 0.10$, logo $\nu = 7.39 \approx 7$.

Teste T para diferença de médias, com variâncias diferentes

A estatística T observada é dada por

$$t_0 = \frac{9.87 - 9.22}{\sqrt{(2.43)^2/7 + (0.88)^2/8}} = 0.67$$

A região crítica, a 5% de significância, é dada por uma t_ν com $\nu = 7$ graus de liberdade. Temos que

$$RC(0.05) = \{[T < -2.364] \cup [T > 2.364]\}$$

e como $t_0 \notin RC$, não rejeitamos a hipótese de igualdade de médias.