

Nome

RA

Assinatura

EXAME DE QUALIFICAÇÃO PARA O MESTRADO EM ESTATÍSTICA

EXAME de INFERÊNCIA

25 de Fevereiro de 2010

Instruções

1. A duração do exame é de 4 horas.
2. Não é permitida consulta.
3. Resolva quatro (4) das cinco (5) questões propostas. Indique na seguinte tabela quais questões foram escolhidas.

Questão	1	2	3	4	5
---------	---	---	---	---	---

4. Cada questão tem a mesma pontuação.
5. Inicie a resolução de cada questão em uma nova folha. Use somente um lado de cada folha.
6. Escreva de maneira clara e organizada.
7. **Justifique** suas respostas.
8. Numere e identifique cada folha utilizada.

Tranquilidade e Bom trabalho

Questão 1

(a) (6 ptos) Seja X uma única observação da densidade

$$f(x, \theta) = \frac{e^{(x-\theta)}}{[1 + e^{(x-\theta)}]^2}, \quad \theta \in R, \quad x \in R.$$

Encontre o teste mais poderoso de tamanho α para testar,

$$H_0 : \theta = 0 \text{ vs } H_a : \theta = 1.$$

(b) (7 ptos) O teste encontrado em (a) é UMP de tamanho α para testar

$$H_0 : \theta \leq 0 \text{ vs } H_a : \theta > 0 ?$$

(c) (12 ptos) Seja X_1, \dots, X_n uma amostra aleatória da densidade $f(x, \theta) = 2x/\theta^2$ onde $0 < x < \theta$. Encontre um intervalo de confiança $(1 - \alpha)$ exato para θ .

Questão 2

Assuma que (N_1, N_2, N_3) tenha distribuição multinomial com tamanho de amostra n (≥ 2) e vetor de probabilidades (p_1, p_2, p_3) .

(a) (7 ptos) Encontre o estimador de máxima verossimilhança de $\tau = p_1 p_2$.

(b) (8 ptos) O estimador encontrado em (a) é ENVUMV? Se não, encontre-o.

(c) (7 ptos) Seja $0 < \theta < 1$. Encontre o teste de RVG para testar

$$H_0 : p_1 = \theta, \quad p_2 = 2\theta(1 - \theta), \quad p_3 = (1 - \theta)^2$$

versus a hipótese alternativa H_a : não se cumpre H_0 .

(d) (3 ptos) Qual é a distribuição assintótica do teste encontrado em (c)?

Questão 3

Sejam Y_1, \dots, Y_n variáveis aleatórias independentes tais que $Y_i \sim N(\beta x_i, \sigma^2)$, onde $\beta \in R$ e os x_i são números conhecidos.

(a) (5 ptos) Encontre estatísticas conjuntamente suficientes para (β, σ^2) .

(b) (6 ptos) Encontre os ENVUMV para β e σ^2 .

(c) (6 ptos) Encontre os estimadores de máxima verossimilhança de β e σ^2 .

- (d) (8 ptos) Suponha σ^2 conhecido. Encontre o teste mais poderoso de tamanho α para testar

$$H_0 : \beta = 0 \text{ vs } H_a : \beta = \beta_0$$

com $\beta_0 > 0$ especificado.

Questão 4

Seja X_1, \dots, X_n uma amostra aleatória da densidade,

$$f(x, \theta) = \theta(\theta + 1)x^{\theta-1}(1 - x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad \theta > 0.$$

- (a) (6 ptos) Encontre um estimador de momentos para θ .
- (b) (6 ptos) Determine a distribuição assintótica do estimador encontrado em (a) especificando os parâmetros da distribuição.
- (c) (7 ptos) Determine a distribuição assintótica do estimador de máxima verossimilhança de θ especificando os parâmetros da distribuição.
- (d) (6 ptos) Encontre o estimador de máxima verossimilhança de $(2\theta + 1)/(1 + \theta^2)$.

Questão 5 Sejam X_1, \dots, X_n uma a.a. de uma distribuição geométrica com função de probabilidade

$$f(x|\theta) = (1 - \theta)^x \theta, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

e $\theta \in (0, 1)$ desconhecido. Suponha que θ tenha distribuição priori $Beta(\alpha, \beta)$

- a) (7 ptos). Encontre o estimador de Bayes de θ sob a perda quadrática.
- b) (5 ptos). O estimador encontrado no item a) é viesado?
- c) (5 ptos). O estimador encontrado no item a) é consistente?
- d) (8 ptos). Encontre o estimador de Bayes de $(1 - \theta)/\theta^2$ sob a perda quadrática.