Nome

RA

Assinatura

EXAME DE QUALIFICAÇÃO PARA O MESTRADO EM ESTATÍSTICA

EXAME de INFERÊNCIA

07 de Janeiro de 2010

Instruções

1. A duração do exame é de 4 horas.

2. Não é permitida consulta.

3. Resolva quatro (4) das cinco (5) questões propostas. Indique na seguinte tabela quais questões foram escolhidas.

Questão	1	2	3	4	5

4. Cada questão tem a mesma pontuação.

5. Inicie a resolução de cada questão em uma nova folha. Use somente um lado de cada folha.

6. Escreva de maneira clara e organizada.

7. **Justifique** suas respostas.

8. Numere e identifique cada folha utilizada.

Tranquilidade e Bom trabalho

Questão 1

Seja X uma única observação da densidade $f(x, \theta) = \theta x^{\theta-1} I_{(0,1)}(x)$ onde $\theta > 0$

(a) (*8 ptos*) Encontre uma quantidade pivotal e a use para construir um IC para θ.

(b) (*9 ptos*) Encontre um IC melhor do que $(Y/2, Y)$, dado que $Y = -\log(X)$

(c) (*8 ptos*) Existe um teste UMP de tamanho α para testar

$$H_0 : \theta \geq 2 \text{ vs } H_a : \theta < 2 \ ?$$

Se existir tal teste determine-o.

Questão 2

Suponha que n peças de equipamentos são submetidas a teste e que suas taxas de falhas $X_1, \ldots, X_n$ formam uma a.a. da densidade exponencial com valor esperado $1/\theta$. Queremos estimar a probabilidade de falha anticipada, isto é, $\tau(\theta) = P(X_1 \leq k)$ para algum k fixo.

(a) (*15 ptos*) Encontre o ENVUMV para $\tau(\theta)$.

(b) (*10 ptos*) Encontre um intervalo de confiança assintótico para $\tau(\theta)$.

Obs. $\frac{X_1}{\sum_{i=1}^n X_i} \sim Beta(1, n-1)$

Questão 3

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ e $Y_1, \ldots, Y_m$ duas amostras aleatórias independentes das densidades $N(\mu_x, \sigma^2)$ e $N(\mu_y, \sigma^2)$, respectivamente.

(a) (*8 ptos*) Encontre o ENVUMV para $\mu_y - \mu_x$.

(b) (*17 ptos*) Deseja-se testar a seguinte hipótese:

$$H_0 : \mu_y = \mu_x \text{ vs } H_a : \mu_y \neq \mu_x.$$

Encontre o teste de Razão de Verossimilhança Generalizado de tamanho α e sua distribuição.

Questão 4

Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma a.a. da densidade $N(\theta, \theta^2)$ com $\theta > 0$. Para este modelo cS é um estimador não viciado para θ, onde

$$c = \frac{\sqrt{n-1}\Gamma((n-1)/2)}{\sqrt{2}\Gamma(n/2)}, \qquad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2.$$

(a) (*6 ptos*) Demonstre que para toda constante a, o estimador $T_a = a\bar{X} + (1-a)(cS)$ é um estimador não viciado para θ.

(b) (*9 ptos*) Encontre o valor de a que produz o estimador T_a com menor variância.

(c) (*10 ptos*) A estatística $(\bar{X}, S^2)$ é suficiente e completa?

Questão 5

Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma a.a. da densidade Gamma$(p, 1/\theta)$ com p conhecido, isto é,

$$f(x) = \frac{\theta^{-p}}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-x/\theta}$$

(a) (*8 ptos*) Seja $p = 1$. Encontre o teste mais poderoso de tamanho α para testar $H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{vs} \quad H_a : \theta = \theta_1, \quad \text{com } \theta_1 > \theta_0.$

(b) (*9 ptos*) Encontre um teste UMP para testar $H_0 : \theta \leq \theta_0 \quad \text{vs} \quad H_a : \theta > \theta_0$

(c) (*8 ptos*) Encontre o estimador de Bayes, com $p = 1$, supondo perda quadrática para θ e assumindo uma densidade a priori $\theta \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$.