# MA093 – Matemática básica 2

## Medidas de ângulos. A circunferência unitária

Francisco A. M. Gomes

UNICAMP - IMECC

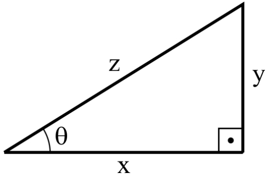
Setembro de 2018

# Tópicos importantes

**O objetivo dessa aula é investigar**

1. A circunferência unitária.
2. Ângulos em radianos.
3. Ângulos negativos e maiores que 360°.

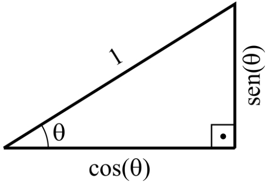
# Lados de um triângulo retângulo




Catetos de um triângulo retângulo em função da hipotenusa e do ângulo $\theta$:

$$sen(\theta) = \frac{y}{z} \quad \rightarrow \quad y = z \cdot sen(\theta)$$

$$cos(\theta) = \frac{x}{z} \quad \rightarrow \quad x = z \cdot cos(\theta)$$




Se a hipotenusa medir 1, os catetos medirão

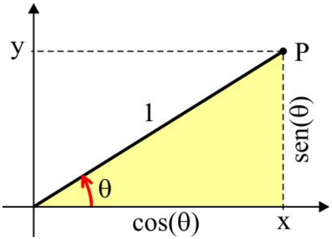
$$sen(\theta) \;\text{ e }\; cos(\theta).$$

# Trabalhando no plano Cartesiano

Vamos supor que:

- o triângulo esteja situado no plano Cartesiano;
- o vértice associado a $\theta$ fique na origem;
- o cateto adjacente a $\theta$ fique sobre a parte positiva do eixo-$x$;
- a hipotenusa do triângulo retângulo meça 1;
- o ângulo $\theta$ seja medido no sentido anti-horário;

Nesse caso,



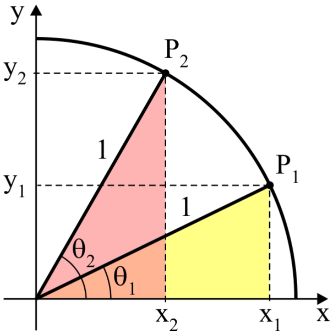

- As coordenadas do ponto $P$ são

$$x = cos(\theta) \quad \text{e} \quad y = sen(\theta).$$

- Pelo teorema de Pitágoras,

$$x^2 + y^2 = 1.$$

# Mudando o ângulo



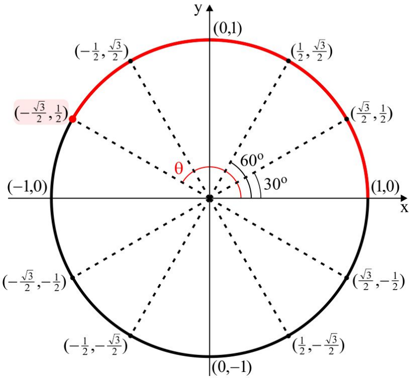

Para cada ângulo $\theta_i$, há um ponto $P_i$ do plano que

- dista 1 da origem;
- tem coordenadas

$$(x_i, y_i) = (cos(\theta_i), sen(\theta_i)).$$

Como a distância de todos os pontos à origem é igual a 1, dizemos que eles pertencem à circunferência de raio 1 centrada na origem, também chamada de circunferência unitária.

# A circunferência unitária




## Definição

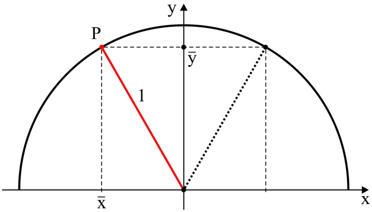
O conjunto de pontos $P_i = (x_i, y_i)$ que satisfazem a equação $x^2 + y^2 = 1$ é chamado **circunferência unitária**.

- O ponto de origem da circunferência é $(1, 0)$, que está sobre a parte positiva do eixo-$x$.
- A cada arco tomado sobre a circunferência unitária associamos um ângulo $\theta$.

# Exercício 1

**Calculando uma coordenada**

O ponto $P(\bar{x}, \sqrt{3}/2)$ pertence à circunferência unitária.
Determine a coordenada $\bar{x}$, sabendo que ela é negativa.

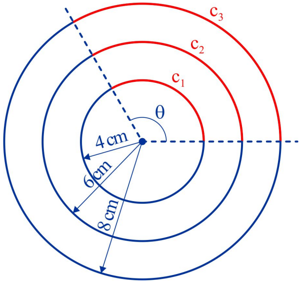



$$\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = 1 \quad \rightarrow \quad \bar{x}^2 = 1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \quad \rightarrow \quad \bar{x}^2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\bar{x} = \pm\sqrt{1/4} = \pm 1/2$$

Como sabemos que $\bar{x} < 0$, concluímos que $\bar{x} = -1/2$.

# Ângulo central em um círculo




- Comprimento de arco: $c = \dfrac{\theta \pi r}{180^\circ}$.
- O comprimento depende do raio $r$.
- Mas a razão $\dfrac{c}{r} = \dfrac{\theta\pi}{180^\circ}$ não depende:

$$\frac{c_1}{r_1} = \frac{c_2}{r_2} = \frac{c_3}{r_3} = \frac{120^\circ\ \pi}{180^\circ} = \frac{2\pi}{3}$$

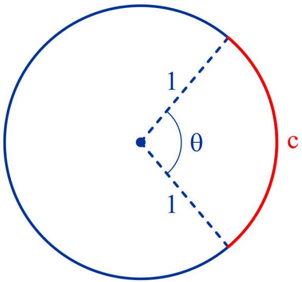
## Ângulo em radianos

Se $\theta$ é um ângulo com vértice no centro de uma circunferência de raio $r$ e se $c$ é o comprimento do arco correspondente ao ângulo, então a medida de $\theta$ em radianos é dada por

$$\theta = c/r.$$

# Ângulos em radianos na circunferência unitária

- Problema: não queremos medir ângulos calculando a razão entre duas grandezas ($c$ e $r$).
- Solução: vamos trabalhar com a circunferência unitária.

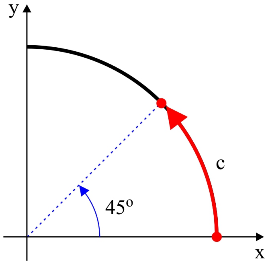



**Ângulo em radianos**

Considere um ângulo $\theta$ com vértice no centro de uma circunferência de raio 1. A medida de $\theta$ em radianos é definida como o comprimento $c$ do arco da circunferência correspondente ao ângulo.

A medida em radianos é adimensional, pois $c$ e $r$ têm a mesma unidade. Mesmo assim, usamos rad para indicar $\theta$ em radianos.

# Convertendo medidas de ângulos



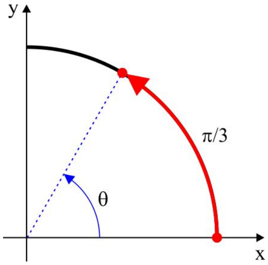

## Conversão para radianos

Vamos converter 45° para radianos.

$$\begin{array}{rcl} 360^\circ & \to & 2\pi \\ 45^\circ & \to & c \end{array} \quad \Rightarrow \quad \frac{360^\circ}{45^\circ} = \frac{2\pi}{c}$$

$$c = \left(\frac{45^\circ}{360^\circ}\right) 2\pi = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

# Convertendo medidas de ângulos



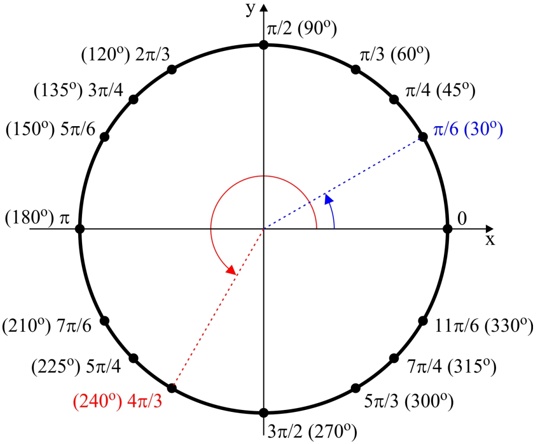

## Conversão para graus

1. Vamos converter $\pi/3$ para graus.

$$\begin{array}{ccc} 360^\circ & \rightarrow & 2\pi \\ \theta & \rightarrow & \pi/3 \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{360^\circ}{\theta} = \frac{2\pi}{\pi/3}$$

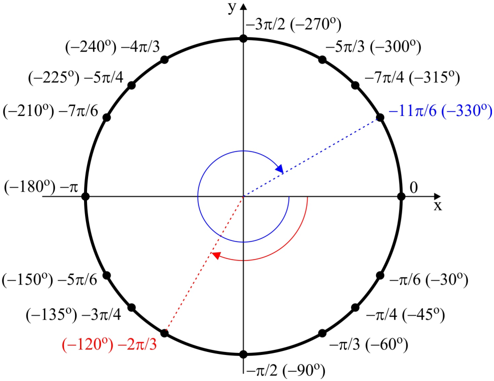
$$\theta = \left(\frac{\pi/3}{2\pi}\right) 360^\circ = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ.$$

# Ângulos e a circunferência unitária




Alguns ângulos com suas medidas em graus e radianos.

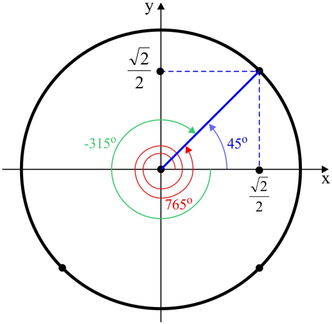
# Ângulos negativos.




Os ângulos têm medida

- positiva se percorremos a circunferência no sentido anti-horário;
- negativa se movemos no sentido horário.

# Ângulos maiores que 360°




**Ângulos coterminais**

Dois ângulos são coterminais se suas semirretas coincidem.

Exemplo: Ângulos de 45°, $-315°$ e 765° são coterminais.

# Encontrando ângulos coterminais

**Ângulos coterminais entre $0°$ e $360°$**

1. Qual ângulo entre $0°$ e $360°$ é coterminal a $542°$?
2. Qual ângulo entre $0°$ e $360°$ é coterminal a $-419°$?
3. Qual ângulo entre $0$ e $2\pi$ é coterminal a $13\pi/4$?

1. $542° - 360° = 182°$.
2. $-419° + 360° = -59° \quad \rightarrow \quad -59° + 360° = 301°$.
3. $13\pi/4 - 2\pi = 5\pi/4$.

# Exercício 2

**Conversão para radianos**

1. Converta $108^\circ$ para radianos.

$0,6\pi \approx 1,885$

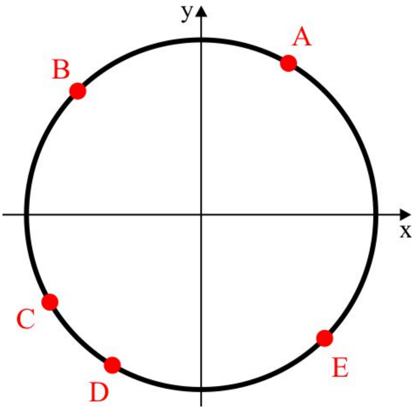
# Exercício 3

## Conversão para graus

1. Converta $2\pi/5$ para graus.

$72^\circ$

# Exercício 4




**Problema**

Indique a que ponto da circunferência unitária corresponde um arco de medida $3\pi/4$.

B

# Exercício 5

**Ângulos coterminais entre 0° e 360°**

Qual ângulo entre 0° e 360° é coterminal a 977°?

$$977^\circ - 360^\circ = 617^\circ \quad \rightarrow \quad 617^\circ - 360^\circ = 257^\circ$$

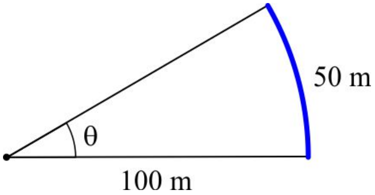
# Exercício 6

## Problema

Calcule o menor ângulo (em graus) entre os ponteiros de um relógio que marca 1 h.

$30^\circ$

# Exercício 7




$28,65^\circ$ ou $1/2$ rad

**Problema**

Calcule a medida do ângulo $\theta$ da figura. Forneça a resposta em graus e em radianos