2^a Lista MM(A)-719 - Algebra Linear - 2^o Semestre/2013

1. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

a) Encontre os auto-valores de A e uma base de autovetores de A.
b) Encontrar duas matrizes $P,\ B \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ tais que: $P^{-1}AP = D$, com D sendo matriz diagonal e $B^2 = A$.

2. Sejam $A \in \mathbb{M}_4$ e $\alpha = \{u_1 = (1,0,-1,1), u_2 = (0,1,1,-1), u_3 = (1,-1,0,1), u_4 = (1,1,-1,0)\}$ base de $\mathbb{R}^4$. Sabe-se que o polinômio característico de A é $f_A(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda-2)^2$, que $\{u_1, u_2\}$ é base do auto espaço associado ao auto valor 1 e que $\{u_3, u_4\}$ é base do auto espaço associado ao auto valor 2.

a) Encontre uma matriz invertível $P \in \mathbb{M}_4$ tal que:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D$$

b) Exiba, explicitamente, a matriz A.

c) Calcule, explicitamente, A^5.

3. Dada a matriz real $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \end{pmatrix}$. Em que condições, sobre a, b, c, A é diagonálizavel em $\mathbb{R}$?

4.Suponha que $T, S : V \to V$ sejam operadores lineares sobre um espaço vetorial real V de dimensão finita satisfazendo $TS = ST$. Se $p(X)$ é um fator irredutível do polinômio característico de T, mostre que o espaço $V_p = \{v \in V : (p(T))^k(v) = 0 \text{ para algum } k > 0\}$ é um subespaço S-invariante não trivial.

5. Sejam $\mathbb{K}$ um corpo, $1 \leq n \in \mathbb{N}$ e $V = \mathbb{M}_n(\mathbb{K}$.

a) Mostre que: Se $P \in GL_n(\mathbb{K})$ então o operador $U : V \to V$ definido por $U(B) = P^{-1}BP$ é isomorfimo linear (ie, operador linear bijetor).

b) Tome $A \in V$ e defina os seguintes operadores lineares sobre V:

$$T : V \to V;\ T(B) = AB \qquad \text{e} \qquad S : V \to V;\ S(B) = AB - BA.$$

b_1) A afirmação: Se A é diagonálizavel então T também é. É falsa ou verdadeira?

b_2) A afirmação: Se A é diagonálizavel então S também é. É falsa ou verdadeira?

6. Determinar uma matriz real invertível P tal que $P^{-1}AP$ e $P^{-1}BP$ sejam ambas diagonalizáveis, onde A e B são as matrizes reais.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$

7.Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita n e $T : V \to V$ um operador linear que tem exatamente n auto valores distintos dois a dois. Mostre que se $S : V \to V$ é operador linear tal que $ST = TS$ então S é um polinômio em T.

8. Dada a matriz real $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Mostre que o polinômio característico de A é $f_A(X) = X^2(X-1)^2$ e que ele também é o polinômio minimal de A.

9. Responda falso ou verdadeiro a cada uma das afirmações abaixo:

a)Se $T : V \to V$ é operador linear não nulo sobre o $\mathbb{K}$-espaço de dimensão finita V então T será diagonálizavel se e somente se existe $g(X) \in \mathbb{K}[X]$ tal que $g(T) = 0$ e $g(X)$ é um produto de polinomios lineares distintos dois a dois.

b)Se uma matriz triangular $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ é semelhante a uma matriz diagonal então A já é diagonal.

c) Se o corpo $\mathbb{K}$ tem característica zero então a matriz, $n \times n$,

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & ... & ... & ... & 1 & 1 \\ 1 & 1 & ... & ... & ... & 1 & 1 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & 1 & ... & ... & ... & 1 & 1 \end{pmatrix}$ é diagonalizável.

d) Se os únicos subespaços T -invariantes do operador linear $T : V \to V$ $(dim(V) = n < \infty)$ são os sub-espaços triviais então o polinômio mínimo de T é irredutível.

d) Se V é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial que admite uma base enumerável e T é um operador linear sobre V então T admite um número infinito de subespaços T-invariantes.

e) Se os únicos auto valores de um operador E sobre um espaço de dimensão finita V são 0 ou 1 então E é uma projeção.

10. Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita n e $W_1, W_2, \cdots, W_m$ subespaços de V. Mostre que: Se $V = W_1 + \cdots + W_m$ e $n = dim(W_1) + \cdots + dim(W_m)$ então $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_m$.

11. Seja $V = \mathcal{C}([-1,1], \mathbb{R})$ =espaço das funções continuas de $[-1,1]$ em $\mathbb{R}$.Considere os seguinte sub-espaços: $W_p = \{f \in V, \mathbb{R}); f(x) = f(-x), \forall x\}$ = funções pares e $W_i = \{f \in V; f(-x) = -f(x), \forall x\}$ = funções impares.

a) Mostre que: $V = W_p \oplus W_i$

b) Se T é operador de V definido por $(Tf)(x) = \int_0^x f(t)dt$, W_p e W_i são T-invariantes?

12. Seja $T : V \to V$ um operador linear sobre V ($dim(V)$ finita) com polinômio característico $f_T(X) = (X - \lambda_1)^{d_1} \cdots (X - \lambda_k)^{d_k}$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ e $g(X) \in \mathbb{K}[X]$ mostre que:

a) λ é auto valor de $g(T)$ se e somente se existe i tal que $g(\lambda) = \lambda_i$

b) Se D é a parte diagonalizável de T então $g(D)$ é a parte diagonalizável de $g(T)$.

13. Encontre a base de Jordan para cada uma das seguintes matrizes:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 6 & -9 & 5 & 4 \\ 7 & -13 & 8 & 7 \\ 8 & -17 & 11 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$; c) $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

14. Sejam $\mathbb{K}$ um corpo e $\mathbb{M}_n = \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ o conjunto das matrizes, $n \times n$, com entradas em $\mathbb{K}$.

a) Quais são as possíveis forma de Jordan de uma matriz $A \in \mathbb{M}_3$ sabendo que o polinômio característico de A é $f_A(X) = (X - a)(X - b)X - c)$ com $a, b, c \in \mathbb{K}$ não necessariamente distintos.

b) Qual é a forma de Jordan de uma matriz $A \in \mathbb{M}_n$ tal que seu polinômio caracterítico é $f_A(X) = (X - \lambda_1)^{d_1} ..... (X - \lambda_k)^{d_k}$ com $\lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j$ e seu polinômio minimal é igual ao característico.

15. a) Seja $<,>_c$ o produto interno canônico sobre $\mathbb{R}^2$ e seja T o operador linear definido por $T(x, y) = (-y, x)$. Na verdade T é a rotação de 90^o e possui a propriedade de que $< \alpha, T(\alpha) >_c = 0$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}^2$. Determinar todos os produtos internos $<,>$ sobre $\mathbb{R}^2$ tais que $< \alpha, T(\alpha) > = 0$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}^2$.

b) Seja $<,>_c$ o produto interno canônico sobre $\mathbb{C}^2$. Demonstrar que não existe operador T, não nulo, sobre $\mathbb{C}^2$ tal que $< \alpha, T\alpha) >_c = 0$ para todo $\alpha \in \mathbb{C}^2$.

16. Seja $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$. Defina para $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$

$$f_A(X, Y) = Y^t AX.$$

Mostre que f_A é um produto interno de $\mathbb{R}^{2\times 1}$ se e somente se $A = A^t$, $a_{11} > 0$,$a_{22} > 0$ e $det(A) > 0$.

17. Seja V um espaço real ou complexo com produto interno $<,>$. Mostrar que a forma quadrática determinada por $<,>$ satisfaz a regra do paralelogramo, ie,

$$\| u + v \|^2 + \| u - v \|^2 = 2(\| u \|^2 + \| v \|^2).$$

18. Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Defina para $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$

$$< X, Y > = Y^t AX.$$

Mostre que $<,>$ é produto interno.

19. Seja $V = \mathbb{R}[x]$ o anel de polinômios sobre o corpo real. Mostre que

a) Mostre que: Se $f(x) = \sum_i a_i x^i$ e $g(x) = \sum_j b_j x^j$ então a formula

$$< f(x), g(x) > = \sum_{i,j} \frac{a_i b_j}{j + k + 1}$$

define um produto interno. (Sugestão: verifique que $< f(x), g(x) > = \int_0^1 f(t)g(t))$

b) Tome W o subespaço de V dos polinômios de grau no máximo 3. E encontre a matriz do produto interno acima restrito ao subespaço W.

20. Seja V um espaço vetorial real ou complexo com produto interno $<,>$. Mostre que: Se $v_1, v_2, \cdots, v_n$ são vetores não nulos de V e para cada par de indíces $i \neq j$ tem-se que $< v_i, v_j > = 0$ então $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ é subconjunto L. I. de V.

Atenção: No exercício 6) houve um erro de digitação,a matriz A do item a) estava errada, já foi corrigido, por favor corrija em sua cópia da lista.