Disciplina: MA 311 /Cálculo III/ Primeiro semestre de 2009

Prova P_1: 03 de Abril de 2009, Campinas

Exercício 3. Considere a e.d.o.

$$y^{(4)} + 4y^{(2)} = \sin\ 2x + xe^x + 4.$$

Encontre a solução da equação homogênea associada.

Usando o método de coeficientes indeterminados encontrar a forma da solução particular SEM calcular os coeficientes.

Seja $L(y) \equiv y^{(4)} + 4y^{(2)}$. A equação homogênea associada é:

$$L(y) \equiv y^{(4)} + 4y^{(2)} = 0. \tag{1}$$

A corespondente equação característica é

$$r^4 + 4r^2 = 0, \tag{2}$$

cujos raizes são:

$$r_1 = r_2 = 0, \quad r_3 = 2i,\ r_4 = -2i.$$

Temos $0 + 2i = \lambda + \mu i$, isto é, $\lambda = 0$, $\mu = 2$. (Foi usada a notação do livro-texto.) (0,2 ponto)

Então a solução geral de (1) é dada por

$$y_0(x) = (C_1 + C_2 x)e^{0.x} + C_3 e^{0.x}\cos(2x) + C_4 e^{0.x}\sin(2x),$$

isto é,

$$y_0(x) = C_1 + C_2 x + C_3\cos(2x) + C_4\sin(2x).$$

(+0,5 ponto)

A solução particular $y_p(x) = y_1(x) + y_2(x) + y_3(x)$, onde

$$L(y_1) = \sin(2x), \tag{3}$$

$$L(y_2) = xe^x, \tag{4}$$

$$L(y_3) = 4. \tag{5}$$

1.) (+0,4 ponto) Para eq. (3): $\alpha = 0, \beta = 2, \alpha + i\beta = 2i$ é raiz da equação característica (2). Então $s = 1$ e y_1 tem a forma

$$y_1(x) = x^1.e^{0.x}[k_1\cos(2x) + k_2\sin(2x)],$$

$$y_1(x) = x[k_1\cos(2x) + k_2\sin(2x)]. \tag{6}$$

2.) (+0,4 ponto) Para eq. (4): $\alpha = 1$ não é raiz da equação característica (2). Então $s = 0$ e

$$y_2(x) = (k_3 + k_4 x)e^x. \tag{7}$$

3.) (+0,4 ponto) Para eq. (5): 0 é raiz dupla da equação característica (2). Então

$$y_3(x) = k_5 x^2. \tag{8}$$

De (6), (7), (8): $y_p(x) = y_1(x) + y_2(x) + y_3(x)$ tem a seguinte forma

$$y_p(x) = x[k_1\cos(2x) + k_2\sin(2x)] + (k_3 + k_4 x)e^x + k_5 x^2,$$

onde k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 são constantes arbitrárias. (+0,1 ponto)