Aplicação da Integral de Riemann no Fluxo Sangüíneo de uma Artéria Obstruída

Mariana Fernandes dos Santos Villela [1] Patrícia Borges dos Santos [2]
marianamat_ufu@yahoo.com.br patricia_1609@yahoo.com.br
Rosana Sueli da Motta Jafelice
rmotta@ufu.br
Faculdade de Matemática,UFU
38408-100, Uberlândia, MG

O fluxo sangüíneo é o volume de sangue que flui através de uma secção de artéria e, pode ser calculado utilizando a Lei de Poiseuille, a qual é uma aplicação da integral de Riemann. Esta lei foi descoberta por Jean Louis Poiseuille (1799-1869) e fornece, a partir da expressão da velocidade do sangue a fórmula do fluxo sangüíneo [1] e [2].

O objetivo deste trabalho é encontrar uma expressão matemática que nos permita calcular o fluxo sangüíneo de uma artéria obstruída, pelo acúmulo de colesterol, utilizando duas aproximações geométricas diferentes desta obstrução.

A lei definida por Poiseuille nos diz que o fluxo φ de um tubo cilíndrico, transportando um líquido com coeficiente de viscosidade η, raio R, comprimento L e pressão ΔP, é dada por:

$$\varphi = \frac{\pi R^4}{8\eta L}\Delta P$$

Com esta definição, e considerando a artéria como sendo um tubo rígido, verificamos o que acontece com o fluxo sangüíneo caso haja um entupimento parcial de uma artéria.

Suponha que ocorra uma obstrução de 25%, assim vamos modelar duas situações de obstrução cujas aproximações serão descritas nas Figuras 1 e 2.

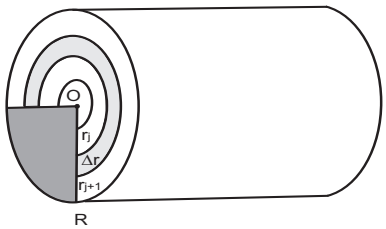

Figura 1: *Representação geométrica 1, onde r_j é a distância do ponto O ao j-ésimo anel e Δr é a largura do anel.*

Para o cálculo do fluxo sangüíneo (φ_1) da artéria obstruída como na Figura 1, fizemos o mesmo procedimento, pelo qual deduzimos a Lei de Poiseuille, diminuindo apenas a área de cada anel em $\frac{\pi}{2} r_j \Delta r$. Considerando L o comprimento da artéria onde ocorreu a obstrução e ΔP_1 a pressão neste local, obtemos a seguinte expressão:

$$\varphi_1 = \frac{3\pi k_1 R^4}{8} \quad \text{onde} \quad k_1 = \frac{\Delta P_1}{4\eta L}.$$

Na Figura 2 temos uma outra representação geométrica de obstrução da artéria. Para o cálculo do fluxo sangüíneo (φ_2) nesse caso, utilizamos procedimento análogo ao da Lei de Poiseuille, diminuindo o raio considerado de R para $t = \sqrt{\frac{3}{4}}R$ e com ΔP_2 a pressão neste local.

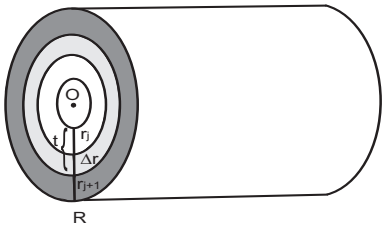

Figura 2: *Representação geométrica 2, onde t é o raio da secção tranversal em que não ocorre obstrução.*

A expressão do fluxo sangüíneo da artéria representada na Figura 2 é dada por:

$$\varphi_2 = \frac{9\pi k_2 R^4}{32} \quad \text{onde} \quad k_2 = \frac{\Delta P_2}{4\eta L}.$$

Assim, supondo que nos três casos o sangue possua a mesma viscosidade, e considerando o mesmo comprimento (L) da artéria, temos que:

$$\frac{\varphi}{\varphi_1} = \frac{4}{3}\frac{\Delta P}{\Delta P_1} \quad \text{e} \quad \frac{\varphi}{\varphi_2} = \frac{16}{9}\frac{\Delta P}{\Delta P_2},$$

ou seja, a razão entre φ e φ_1 é proporcional à razão entre ΔP e ΔP_1 e a razão entre φ e φ_2 é proporcional à razão entre ΔP e ΔP_2.

Referências

[1] Batschelet, E., Introdução à Matemática para Biocientistas. São Paulo: EDUSP, 1978.

[2] Hoffman, L. D.; Bradley, G. L., Cálculo: Um Curso Moderno e suas Aplicações. Rio de Janeiro: LTC, 2002.

[1] Bolsista do MEC/SESu, PETMAT, UFU.
[2] Bolsista do MEC/SESu, PETMAT, UFU.