

# Taxa de Incidência Não-Bilinear Dependente dos Indivíduos Infectados e Recuperados

Maria Beatriz F. Leite

UNICAMP - IMECC  
Depto. de Matemática Aplicada  
bialeite@ime.unicamp.br

Rodney C. Bassanezi

UNICAMP - IMECC  
Depto. de Matemática  
rodney@ime.unicamp.br

Hyun M. Yang

UNICAMP - IMECC  
Depto. de Matemática Aplicada  
hyunyang@ime.unicamp.br

## 1 Introdução

A não homogeneidade da população pode ser incorporada nos modelos matemáticos de epidemiologia modificando-se, por exemplo, a taxa de incidência (taxa com a qual novas infecções ocorrem). Nos modelos epidemiológicos clássicos, onde considera-se a taxa de incidência bilinear, supõe-se, de maneira geral, que os indivíduos estão distribuídos homogeneamente na população e que a quantidade de novas infecções é proporcional ao número de encontros entre indivíduos suscetíveis e infectados ( $\beta IS$ ). Este é o caso mais simples, no qual a taxa cresce com o crescimento de suscetíveis e infectados. Porém, essa suposição nem sempre é adequada, dependendo do fenômeno a ser modelado. A fim de citar algumas situações nas quais a não bilinearidade na taxa de incidência pode ser necessária, citamos: a) efeito de saturação na propagação da infecção dependendo da quantidade de infectados presente, uma vez que parece razoável que o número de contatos de um indivíduo suscetível com indivíduos infectados por unidade de tempo não possa crescer sempre linearmente [Capasso [1]]; b) a necessidade de exposições múltiplas ao patógeno para que ocorra a infecção [Hethcote [2]]. Podemos ainda utilizar taxas não bilineares para descrever as situações nas quais é relevante considerar a heterogeneidade genética dos indivíduos. Isto pode acarretar diferentes respostas imunológicas, diferentes eficiências de transmissão de acordo com a quantidade de vírus presente no organismo, diferentes grau de suscetibilidade, o que tornaria alguns indivíduos mais suscetíveis do que outros.

Neste trabalho, apresentamos um modelo com taxa não bilinear que generaliza a taxa proposta por Liu [3]  $\beta I^p S$ , considerando-se o expoente  $p$  como uma função  $\phi$  que depende do número de indivíduos e que descreve, em certo sentido, a facilidade ou oposição à propagação da infecção. Inicialmente, exigiremos que a função  $\phi$  seja

contínua, positiva, monótona, sem pontos de inflexão. O fato da função potência depender das densidades de indivíduos suscetíveis, infectados e recuperados tem como objetivo refletir aspectos como, por exemplo, a hostilidade do ambiente (que desfavorece a propagação de uma doença), a imunidade coletiva conferida pelos indivíduos imunes, o risco representado pelos infectados, etc.

## 2 O Modelo

Consideremos um modelo *SIR* com uma taxa de incidência na qual permitimos que o valor da potência do modelo de Liu [3] dependa do número de indivíduos de cada classe.

Admitimos que as “proteções” sejam uma medida de como os indivíduos imunes e o ambiente se opõe a um contato adequado (dificultando a propagação da doença), e o “risco” indique a habilidade da transmissão da infecção quando um contato adequado ocorre entre suscetíveis e infectados.

Dessa forma, as suposições que determinam esta dependência são:

a) a heterogeneidade espacial e a imunidade “coletiva” contribuem para levar o sistema ao ponto de equilíbrio trivial. Assumimos que a proteção fornecida pela imunidade coletiva obedece a uma relação linear com relação a  $r$ , enquanto que o termo constante  $\bar{p}_0$  representa barreiras naturais. Assim a função de “proteção” considerada pode ser dada por:  $\phi_{\bar{p}}(r) = \bar{p}_0 + \bar{p}r$ .

b) o risco representado pelos portadores contribuem para levar o sistema ao ponto de equilíbrio não trivial. Assumimos novamente uma relação linear para esta forma de risco com relação a  $s$  e  $i$ , isto é, a função de “risco” é dada por:  $\phi_{\bar{h}}(s, i) = as + \bar{h}i$ .

Note que se  $\bar{p}_0 > \bar{p}$  então o ambiente é hostil para o espalhamento da doença e esta hostilidade protege mais os indivíduos suscetíveis do que a imunidade coletiva. Por outro lado, é razoável supor que os infectados provocam um risco maior do que os suscetíveis e, nesse sentido supomos  $\bar{h} > a$ .

Considerando as duas suposições acima, isto é, os indivíduos imunes mais o ambiente podem ser considerados como barreiras contra o espalhamento da infecção, enquanto que indivíduos suscetíveis e infectados facilitam a transmissão do vírus, a função potência de infecciosidade  $\phi$  é descrita por

$$\phi = \frac{\phi_{\bar{p}}}{\phi_{\bar{h}}} \Rightarrow \phi(s, i) = \frac{p_0 + p(1 - s - i)}{s + hi}, \quad (1)$$

onde  $p_0 = \bar{p}_0/a$ ,  $p = \bar{p}/a$ ,  $h = \bar{h}/a$  e  $r = 1 - s - i$ .

Os parâmetros  $p$  e  $p_0$  representam, respectivamente, as proteções conferidas pela imunidade coletiva e pelo ambiente, e  $h$  é o risco devido aos portadores distribuídos de forma heterogênea na comunidade.

A partir das suposições acima, nosso modelo é descrito pelas equações:

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = \mu - [\lambda(s, i) + \mu] s \\ \frac{di}{dt} = [\lambda(s, i)] - (\mu + \gamma) i, \end{cases} \quad (2)$$

onde  $r = 1 - s - i$  e  $\lambda(s, i) = \beta i^{\phi(s, i)} s$  é a força de infecção não linear com  $\phi(s, i)$  dada por (1).

### 3 Pontos de Equilíbrio

Os pontos de equilíbrio do sistema (2) são:

- Ponto de equilíbrio trivial  $P_0 = (1, 0)$ , correspondente a ausência de infecção na população, que sempre existe, pois como  $p_0 > 0$ , temos

$$\begin{aligned} \left. \frac{ds}{dt} \right|_{(1,0)} &= \mu - [\beta i^{\phi(1,0)} + \mu] s = \mu - [\beta 0^{p_0} + \mu] = 0 \quad \text{e} \\ \left. \frac{di}{dt} \right|_{(1,0)} &= \beta 0^{p_0} = 0. \end{aligned}$$

- Os pontos de equilíbrio não triviais  $P^* = (s^*, i^*)$ , com  $i^* \neq 0$  que são as soluções do sistema

$$\begin{cases} g(i) = R_0^{-1} \\ s = 1 - R^{-1}i, \end{cases} \quad (3)$$

onde

$$R = \frac{\mu}{\mu + \gamma}$$

e

$$R_0 = \frac{\beta}{\mu + \gamma}.$$

Usando o fato que no equilíbrio a quantidade de indivíduos suscetíveis é dada por  $s = 1 - R^{-1}i$ , obtemos

$$f(i) = \frac{1 - p_0 - [p(R^{-1} - 1) + R^{-1} - h] i}{1 - (R^{-1} - h) i}. \quad (4)$$

As soluções viáveis do sistema (3) devem permanecer no intervalo  $0 < i \leq i_m = R$ .

## 4 Estabilidade do Equilíbrio Trivial

As conclusões sobre a estabilidade do ponto de equilíbrio trivial  $P_0$  são obtidas a partir da análise do sistema (2) numa vizinhança do ponto  $(1, 0)$ , novamente a partir da expressão para a variação da fração de indivíduos infecciosos que é dada por

$$\frac{di}{dt} = [\beta s i^{\phi(s,i)-1} - (\mu + \gamma)] i.$$

Substituindo a expressão para  $\phi(s, i)$  dada em (1) e usando o fato que  $s + i + r = 1$ , obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} &= \left[ \beta s i^{\frac{p_0-1+(p+1)r-(h-1)i}{1-r+(h-1)i}} - (\mu + \gamma) \right] i \\ &\leq \beta \left[ i^{\frac{p_0-1+(p+1)r-(h-1)i}{1-r+(h-1)i}} - R_0^{-1} \right] i, \end{aligned}$$

pois  $1 \geq 1 - r - i = s$ .

A estabilidade do ponto de equilíbrio trivial depende do comportamento da função  $i^{\frac{p_0-1+(p+1)r-(h-1)i}{1-r+(h-1)i}}$ . Como nossa função potência  $\phi$  depende também dos indivíduos imunes, definimos

$$\Omega(r_f) = \sup_{0 < i < i_m} i^{\frac{p_0-1+(p+1)r_f-(h-1)i}{1-r_f+(h-1)i}} \quad (5)$$

para um valor fixo  $r_f$  da fração dos indivíduos imunes. Assim, podemos escrever

$$\frac{di}{dt} \leq \beta [\Omega(r_f) - R_0^{-1}] i.$$

Se  $\Omega(r_f) \leq R_0^{-1}$  teremos  $\frac{di}{dt} < 0$  e o ponto de equilíbrio trivial será estável. Se  $\Omega(r_f) > R_0^{-1}$  não podemos concluir nada a respeito da estabilidade do ponto trivial.

Vamos analisar as possíveis regiões de atração do ponto de equilíbrio trivial  $P_0 = (1, 0)$  em função dos valores de  $i$  e  $r$  dependendo do sinal do expoente. Como já comentamos acima, consideraremos  $\bar{h} > a$ , o que implica considerarmos  $h > 1$ . Desta forma, o sinal do expoente depende apenas do numerador,  $p_0 - 1 + (p + 1)r - (h - 1)i$ . Escrevendo  $r$  em função de  $i$ , obtemos  $r = \frac{(h-1)i+1-p_0}{p+1}$ , e desta forma  $r$  depende linearmente de  $i$ . Basta portanto verificar o sinal do expoente nos semi-planos limitados pela reta.

**Caso 1:**

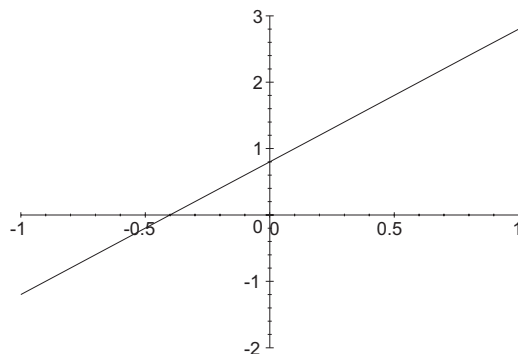


Figura 1:  $r(i) = \frac{(h-1)i+1-p_0}{p+1}$  quando  $0 < p_0 \leq 1$ .

Na região *A* (semi-plano que não contém a origem), o expoente  $-f(i)$  é positivo e na região *B* (semi-plano que contém a origem), o expoente é negativo. Numa vizinhança do ponto de equilíbrio trivial no início da doença, isto é, fazendo  $r_f = 0$  e  $i$  suficientemente pequeno, temos

$$\frac{dr}{dt} = \gamma i - \mu r \cong \gamma i > 0, \text{ para } i > 0$$

e

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} &= \beta \left[ (1 - r - i) i^{\frac{p_0-1+(p+1)r-(h-1)i}{1-r+(h-1)i}} - R_0^{-1} \right] i \\ &\cong \beta \left[ (1 - i) i^{\frac{p_0-1-(h-1)i}{1+(h-1)i}} - R_0^{-1} \right] i, \end{aligned}$$

e para  $i$  suficientemente pequeno teremos  $\frac{di}{dt} > 0$ , pois o expoente é negativo. No semi plano que contém a origem o expoente é negativo e portanto o ponto trivial  $(0, 0)$  é instável. Se a solução em algum instante  $t$  encontra-se no semi plano oposto, temos várias possibilidades. Se houver um ponto de equilíbrio não trivial  $P^*$  estável, então a solução pode tender a ele. Se não houver tal ponto nesta região, então a solução pode ser atraída para o semi plano que contém a origem e neste caso não se estabilizar.

Portanto no caso  $0 < p_0 \leq 1$ , o ponto de equilíbrio trivial é sempre instável.

**Caso 2:**

Na região *A* (semi-plano que contém a origem), temos que o expoente  $-f(i)$  é positivo e na região *B* (semi-plano que não contém a origem), o expoente é negativo. No início da doença, logo após a introdução da infecção na comunidade, a fração de indivíduos imunes pode ser desprezada. Em outras palavras, fazendo  $r_f = 0$  em (5), obtemos

$$\Omega = \Omega(0) = \sup_{0 < i < i_m} i^{\frac{p_0-1-(h-1)i}{1+(h-1)i}}.$$

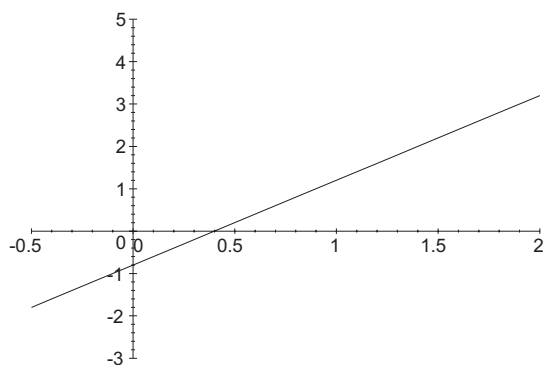


Figura 2:  $r(i) = \frac{(h-1)i+1-p_0}{p+1}$  quando  $p_0 > 1$ .

Notemos que

$$\left( i^{\frac{p_0-1-(h-1)i}{1+(h-1)i}} \right)' = \left( e^{\frac{p_0-1-(h-1)i}{1+(h-1)i} \ln i} \right) \left( \frac{p_0-1-(h-1)i}{1+(h-1)i} \frac{1}{i} + \ln i \frac{-p_0(h-1)}{[1+(h-1)i]^2} \right)$$

e, portanto, a função  $i^{\frac{p_0-1-(h-1)i}{1+(h-1)i}}$  é crescente quando  $p_0 > 1$  e  $i < i_c = \frac{p_0-1}{h-1}$ . Isto implica que  $\Omega(0)$  ocorre em  $i_c$ .

Se  $\Omega(0) \leq R_0^{-1}$  então  $\frac{di}{dt} < 0$  e a doença não se estabelece; o ponto trivial é estável. Contudo, se  $\Omega(0) > R_0^{-1}$ , no intervalo  $0 < i < i_c$  existe um valor limiar da fração de infectados,  $\hat{i}$  para o qual  $\left( i \right)^{\frac{p_0-1-(h-1)i}{1+(h-1)i}} = R_0^{-1} = \Omega^*$ . Neste caso, para valores de  $i$  tais que  $i < \hat{i}$  teremos  $i^{\frac{p_0-1-(h-1)i}{1+(h-1)i}} < R_0^{-1}$  e assim quando a condição inicial  $i_0$  satisfaz  $i_0 < \hat{i}$  a doença não se estabelece; o ponto trivial é estável. Para valores de  $i$  tais que  $i > \hat{i}$  teremos  $i^{\frac{p_0-1-(h-1)i}{1+(h-1)i}} > R_0^{-1}$  e assim quando a condição inicial  $i_0$  satisfaz  $i_0 > \hat{i}$  a doença pode se estabelecer. No gráfico abaixo representamos a reta  $R_0^{-1}$  e um esboço da curva  $i^{\frac{p_0-1-(h-1)i}{1+(h-1)i}}$  até  $i = i_c$ .

Até  $i_c$  a função cresce. Se  $\Omega(0) < R_0^{-1}$  (caso I) para qualquer valor de  $i$  tal que  $i < i_c$  a doença não se estabelece. Se  $\Omega(0) > R_0^{-1}$  (caso II), então existe um valor de  $i$ ,  $\hat{i}$ , para o qual abaixo dele garantimos que a doença não se estabelece. Acima desse valor a doença pode se estabelecer. Portanto, se a barreira natural  $p_0$  é suficientemente grande é possível erradicar a doença no início do processo nos casos: a)  $R_0$  é suficientemente pequeno tal que  $\Omega(0) < R_0^{-1}$ ; b) a fração inicial de infectados está abaixo do valor limiar  $\hat{i}$  mesmo quando  $\Omega(0) > R_0^{-1}$ .

Vale a pena notar que essa análise tem sentido somente no início do processo de espalhamento da doença, quando  $r \sim 0$ , e além disso, neste caso temos

$$\frac{di}{dt} \cong \beta \left[ i^{\frac{p_0-1-(h-1)i}{1+(h-1)i}} - R_0^{-1} \right] i,$$

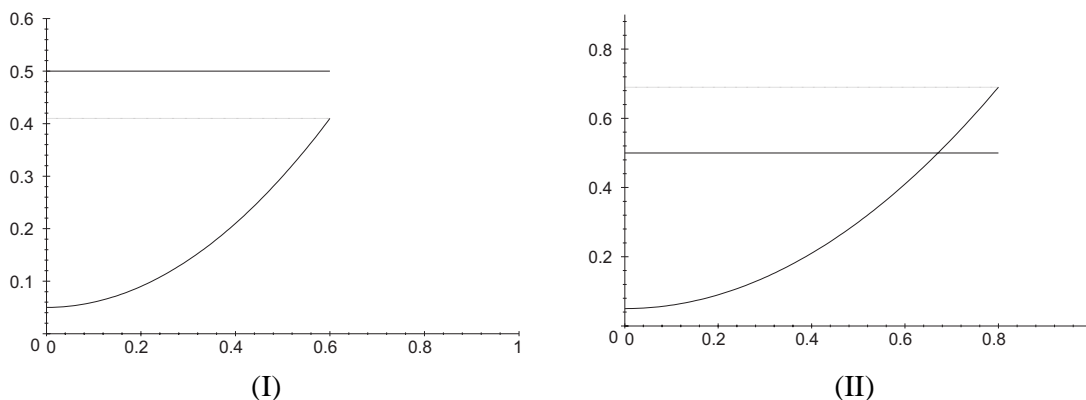


Figura 3:  $i^{\phi(i)-1} = i^{\frac{p_0-1-(h-1)i}{1+(h-1)i}}$  para  $\Omega < R_0^{-1}$  (I) e  $\Omega > R_0^{-1}$  (II).

pois  $1 - r - i \cong 1$ .

Devido a este fato, nas simulações numéricas com valores  $\hat{i} \cong R_0^{-1}$  o sistema tende para o ponto de equilíbrio trivial.

### 5 Ponto de Equilíbrio Não Trivial

A análise da quantidade de equilíbrios não triviais existente para o sistema (2) em questão será feita considerando-se as condições de equilíbrio, ou seja, substituindo  $s^* = 1 - R^{-1}i$  e usando o fato que  $r = 1 - s - i$ . Assim passamos a trabalhar com uma função de uma variável, ou seja

$$\phi(i) = \frac{p_0 + pi(R^{-1} - 1)}{1 - (R^{-1} - h)i}$$

e

$$f(i) = 1 - \phi(i) = \frac{1 - p_0 - [p(R^{-1} - 1) + R^{-1} - h] i}{1 - (R^{-1} - h) i}$$

Temos ainda

$$\phi(0) = 1 - p_0$$

$$f'(i) = \frac{-p(R^{-1} - 1) - p_0(R^{-1} - h)}{[1 - (R^{-1} - h)i]^2}$$

- Se  $f'(i) < 0$  e  $f(i) > 0$  então a função  $g(i)$  é decrescente;
- Se  $f'(i) < 0$  e  $f(i) < 0$  ou  $f'(i) > 0$  então a função  $g(i)$  pode ser crescente ou decrescente.

Neste caso, a análise do comportamento da função  $f(i)$  dada por (4) será feita através de um estudo geométrico a partir das expressões de seu numerador e denominador.

Sejam

$$n(i) = 1 - p_0 - [p(R^{-1} - 1) + R^{-1} - h]i \text{ e}$$

$$d(i) = 1 - (R^{-1} - h)i$$

as expressões para o numerador e denominador de  $f(i)$ , respectivamente. Temos que  $n(i_1) = 0$  e  $d(i_2) = 0$  com

$$i_1 = \frac{1 - p_0}{R^{-1}(p + 1) - (p + h)}$$

$$i_2 = \frac{1}{R^{-1} - h}.$$

As possibilidades para os gráficos de  $n(i)$  e  $d(i)$  são mostrados nas Figuras 4, 5, 6 e 7:

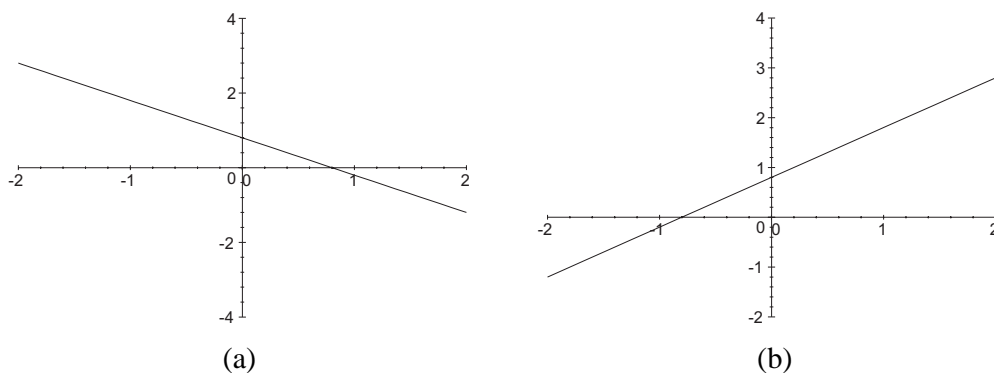


Figura 4: Gráfico de  $n(i)$  quando  $0 < p_0 < 1$  e (a)  $p > \frac{h-R^{-1}}{R^{-1}-1}$ , (b)  $p < \frac{h-R^{-1}}{R^{-1}-1}$ .

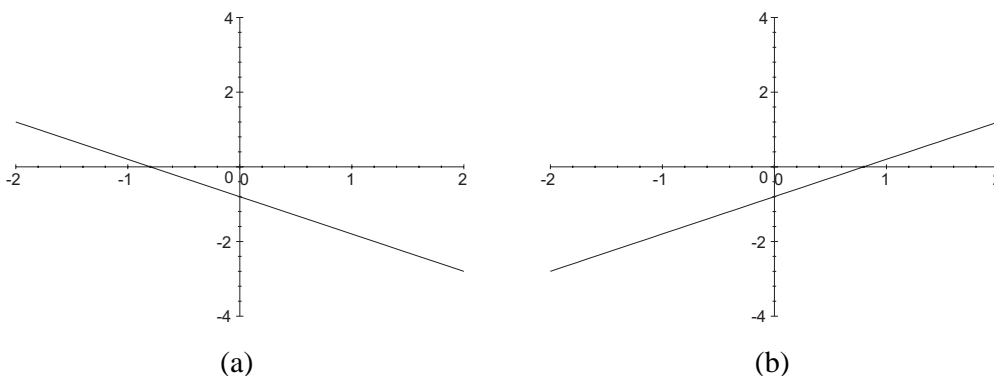


Figura 5: Gráfico de  $n(i)$  quando  $p_0 > 1$  e (a)  $p > \frac{h-R^{-1}}{R^{-1}-1}$ , (b)  $p < \frac{h-R^{-1}}{R^{-1}-1}$ .



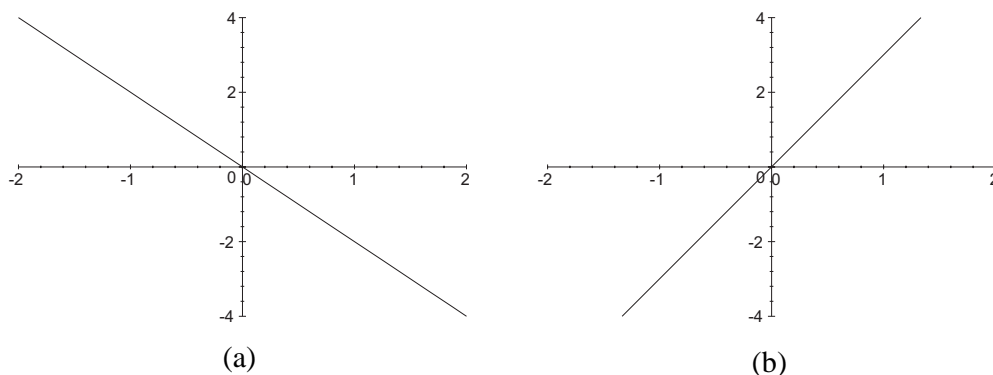


Figura 6: Gráfico de  $n(i)$  quando  $p_0 = 1$  e (a)  $p > \frac{h-R^{-1}}{R^{-1}-1}$ , (b)  $p < \frac{h-R^{-1}}{R^{-1}-1}$ .

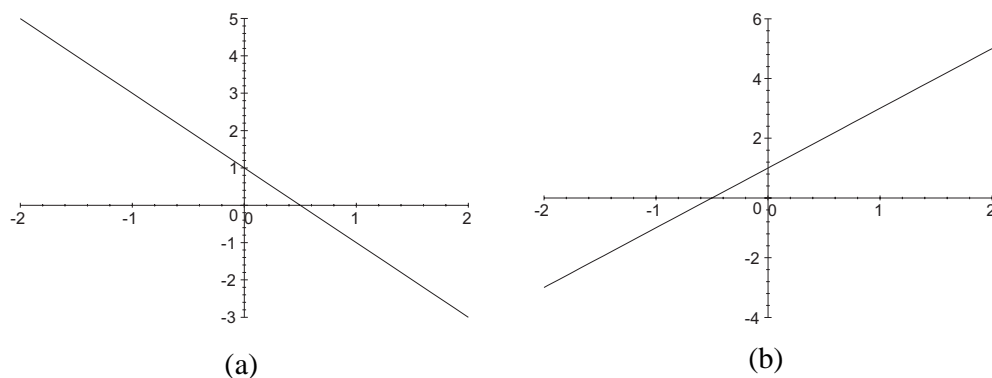


Figura 7: Gráfico de  $d(i)$  quando (a)  $R^{-1} > h$  e (b)  $R^{-1} < h$ .

O sinal da função  $f(i)$  bem como da sua derivada  $f'(i)$  depende das posições relativas de  $i_1$  e  $i_2$  e como o intervalo de interesse é  $0 < i < i_m = R$ , essa análise depende dos valores de

$$i_m - i_1 = \frac{R^{-1}(p+1) - (p+h) - R^{-1}(1-p_0)}{R^{-1}(R^{-1}(p+1) - (p+h))}$$

$$i_m - i_2 = \frac{-h}{R^{-1}(R^{-1} - h)}$$

$$i_1 - i_2 = \frac{(R^{-1} - h)(1 - p_0) - R^{-1}(p+1) + p+h}{(R^{-1}(p+1) - (p+h))(R^{-1} - h)}$$

e temos as possibilidades descritas a seguir. Nos gráficos abaixo, a linha cheia (—) representa o gráfico de  $d(i)$  (denominador de  $f(i)$ ), enquanto que a linha pontilhada (- -) representa o gráfico de  $n(i)$  (numerador de  $f(i)$ ).

**Caso (A)**  $0 < p_0 < 1$  e  $R^{-1} > h$ . Observe que neste caso temos sempre  $p > \frac{h-R^{-1}}{R^{-1}-1}$ .

A.1)  $p > \frac{h-R^{-1}p_0}{R^{-1}-1}$ . Isto implica que  $0 < i_1 < i_m < i_2$ .

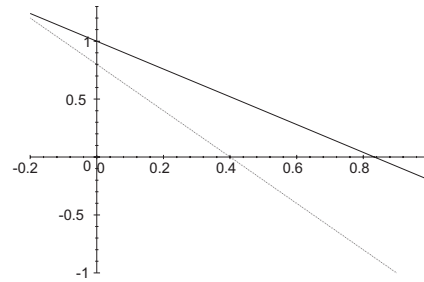


Figura 8:  $n(i)$  (- - -) e  $d(i)$  (—) no caso (A.1).

A.2)  $p < \frac{h-R^{-1}p_0}{R^{-1}-1}$ . Isto implica que  $0 < i_m < i_1 < i_2$ .

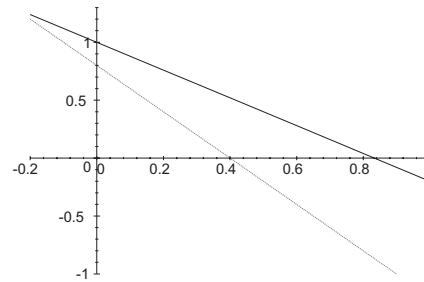


Figura 9:  $n(i)$  (- - -) e  $d(i)$  (—) no caso (A.2).

**Caso (B)**  $0 < p_0 < 1$  e  $R^{-1} < h$ .

B.1)  $p > \frac{h-R^{-1}}{R^{-1}-1}$ .

B.1.1)  $p > \frac{h-R^{-1}p_0}{R^{-1}-1}$ . Isto implica que  $i_2 < 0 < i_1 < i_m$ .

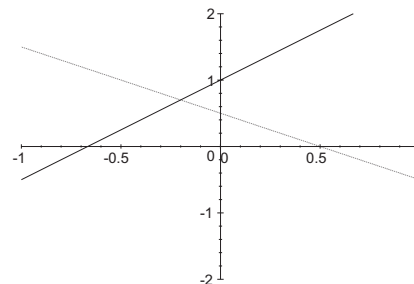


Figura 10:  $n(i)$  (- - -) e  $d(i)$  (—) no caso (B.1.1).

B.1.2)  $p < \frac{h-R^{-1}p_0}{R^{-1}-1}$ . Isto implica que  $i_2 < 0 < i_m < i_1$ .

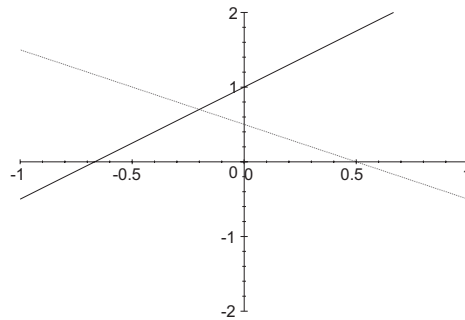


Figura 11:  $n(i)$  (- - -) e  $d(i)$  (—) no caso (B.1.2).

B.2)  $p < \frac{h-R^{-1}}{R^{-1}-1}$ .

B.2.1)  $p > \frac{p_0(h-R^{-1})}{R^{-1}-1}$ . Isto implica que  $i_1 < i_2 < 0 < i_m$ .

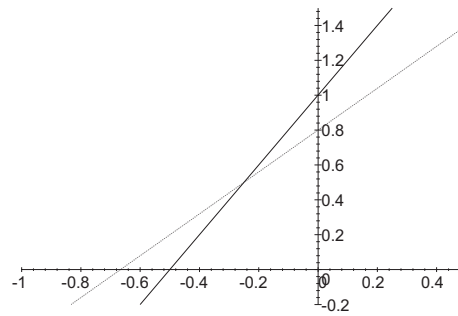


Figura 12:  $n(i)$  (- - -) e  $d(i)$  (—) no caso (B.2.1).

B.2.2)  $p < \frac{p_0(h-R^{-1})}{R^{-1}-1}$ . Isto implica que  $i_2 < i_1 < 0 < i_m$ .

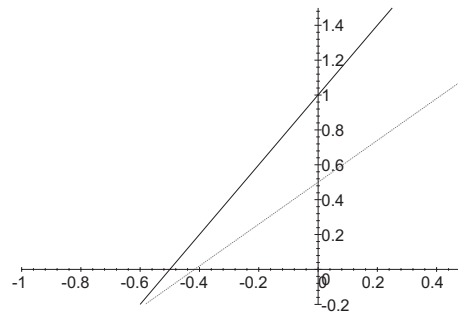


Figura 13:  $n(i)$  (- - -) e  $d(i)$  (—) no caso (B.2.2).

**Caso (C)**  $p_0 > 1$  e  $R^{-1} > h$ . Observe que neste caso temos sempre  $p > \frac{h-R^{-1}}{R^{-1}-1}$  e isto implica que  $i_1 < 0 < i_m < i_2$ .

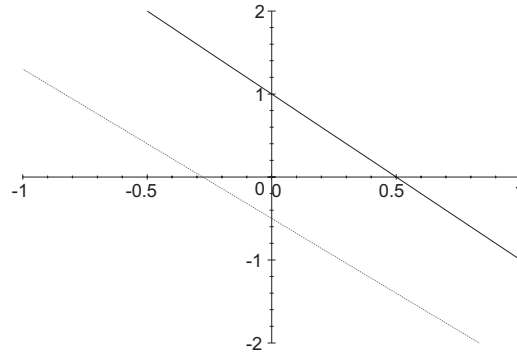


Figura 14:  $n(i)$  (- - -) e  $d(i)$  (—) no caso (C).

**Caso (D)**  $p_0 > 1$  e  $R^{-1} < h$ .

D.1)  $p < \frac{h-R^{-1}}{R^{-1}-1}$ .

D.1.1)  $p < \frac{h-R^{-1}p_0}{R^{-1}-1}$ . Isto implica que  $i_2 < 0 < i_1 < i_m$ .

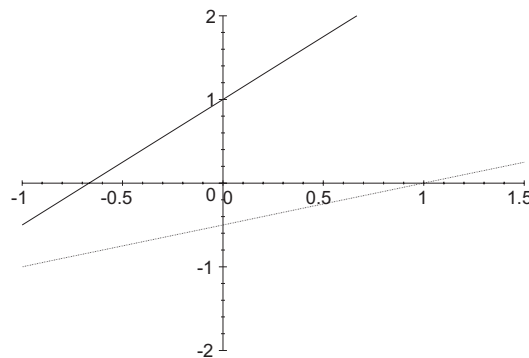


Figura 15:  $n(i)$  (- - -) e  $d(i)$  (—) no caso (D.1.1).

D.1.2)  $p > \frac{h-R^{-1}p_0}{R^{-1}-1}$ . Isto implica que  $i_2 < 0 < i_m < i_1$ .

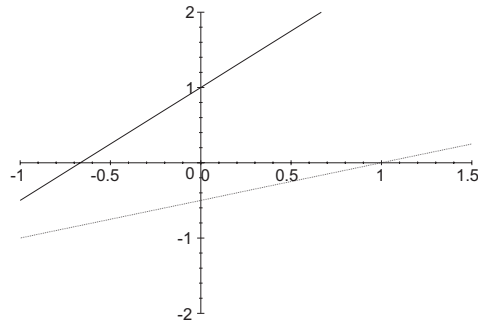


Figura 16:  $n(i)$  (- - -) e  $d(i)$  (—) no caso (D.1.2).

D.2)  $p > \frac{h-R^{-1}}{R^{-1}-1}$ .

D.2.1)  $p > \frac{p_0(h-R^{-1})}{R^{-1}-1}$ . Isto implica que  $i_2 < i_1 < 0 < i_m$ .

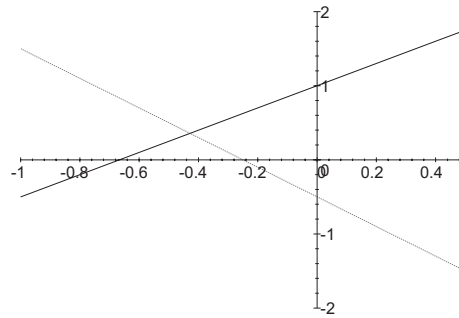


Figura 17:  $n(i)$  (- - -) e  $d(i)$  (—) no caso (D.2.1).

D.2.2)  $p < \frac{p_0(h-R^{-1})}{R^{-1}-1}$ . Isto implica que  $i_1 < i_2 < 0 < i_m$ .

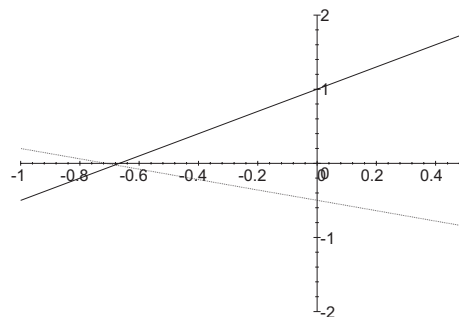


Figura 18:  $n(i)$  (- - -) e  $d(i)$  (—) no caso (D.2.2).

**Caso (E)**  $p_0 = 1$  e  $R^{-1} > h$ . Observe que neste caso temos sempre  $p > \frac{h-R^{-1}}{R^{-1}-1}$  e isto implica que  $0 < i_1 < i_m < i_2$ .

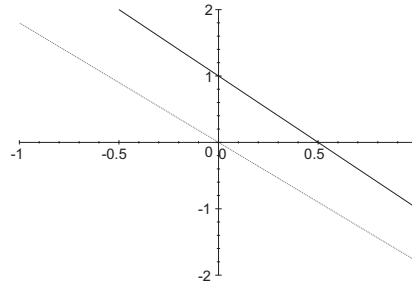


Figura 19:  $n(i)$  (- - -) e  $d(i)$  (—) no caso (E).

**Caso (F)**  $p_0 = 1$  e  $R^{-1} < h$ .

F.1)  $p > \frac{h-R^{-1}}{R^{-1}-1}$ . Isto implica que  $i_2 < i_1 = 0 < i_m$ .

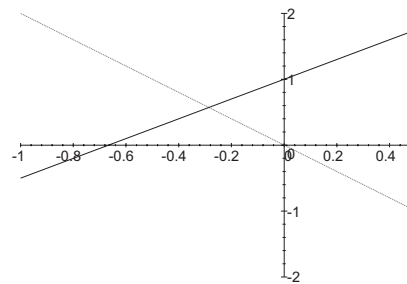


Figura 20:  $n(i)$  (- - -) e  $d(i)$  (—) no caso (F.1).

F.2)  $p < \frac{h-R^{-1}}{R^{-1}-1}$ . Isto implica que  $i_2 < i_1 = 0 < i_m$ .

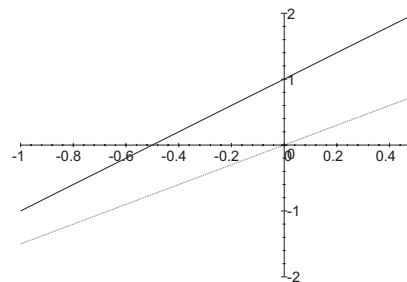


Figura 21:  $n(i)$  (- - -) e  $d(i)$  (—) no caso (F.2).

A partir destas informações, representamos graficamente os possíveis comportamentos para a função  $g(i)$ .

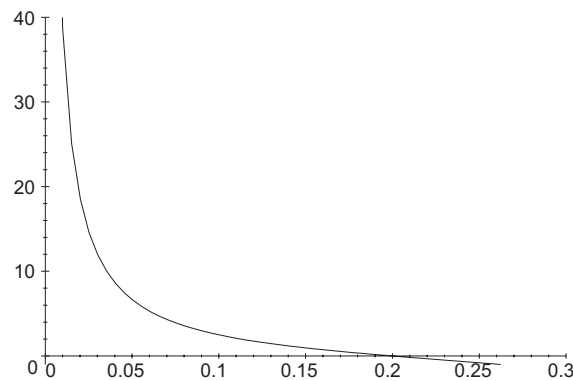


Figura 22:  $g(i)$  nos casos (A.2), (B.1.2), (B.2.1).

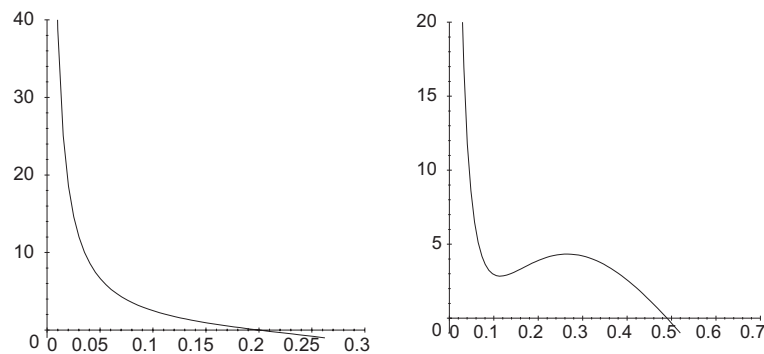


Figura 23:  $g(i)$  nos casos (A.1), (B.1.1), (B.2.2).

Nos casos (B.1.1) e (B.2.2) a função  $g(i)$  pode apresentar diferentes comportamentos, dependendo dos valores dos parâmetros, conforme os seguintes gráficos:

Já nos casos (C), (D.1.1), (D.1.2), (D.2.1) e (D.2.2) o comportamento qualitativo da função  $g(i)$  é sempre o mesmo, exceto sua inclinação próximo à origem. Temos que  $\lim_{i \rightarrow 0} g'(i) = 0$  se  $p_0 > 2$  e  $\lim_{i \rightarrow 0} g'(i) = \infty$  se  $1 < p_0 < 2$ . Assim temos os seguintes gráficos possíveis:

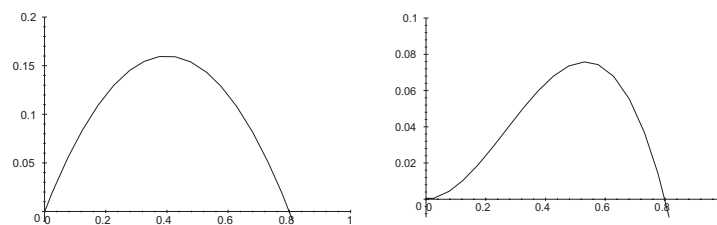


Figura 24:  $g(i)$  nos casos (C), (D.1.1), (D.1.2), (D.2.1), (D.2.2).

Finalmente para os casos (E) e (F), que correspondem ao caso particular  $p_0 = 1$  temos as seguintes possibilidades:

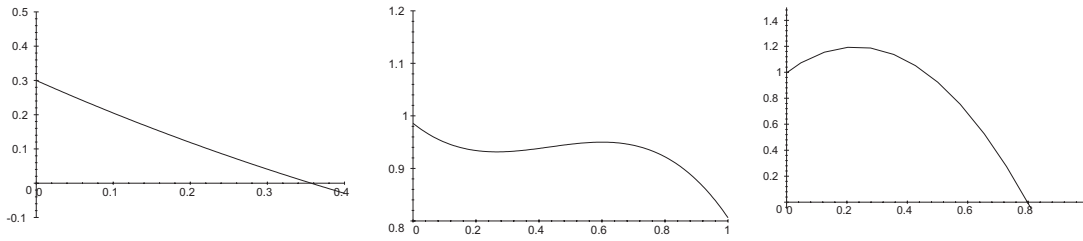


Figura 25:  $g(i)$  nos casos(E), (F.1) e (F.2).

Desta forma, podemos sintetizar os principais resultados qualitativos na Tabela 1:

Caso	Condições		Equilíbrio trivial	Quantidade de equilíbrios não triviais
D) $0 < p_0 < 1$	I.a) $1 < h < R^{-1}$		instável	1
	I.b) $R^{-1} < h$	$0 < p < \frac{p_0(h-R^{-1})}{R^{-1}-1}$	instável	1, 2 ou 3
		$\frac{p_0(h-R^{-1})}{R^{-1}-1} < p < \frac{h-R^{-1}}{R^{-1}-1}$	instável	1
		$\frac{h-R^{-1}}{R^{-1}-1} < p < \frac{h-R^{-1}p_0}{R^{-1}-1}$	instável	1
		$\frac{h-R^{-1}}{R^{-1}-1} < \frac{h-R^{-1}p_0}{R^{-1}-1} < p$	instável	1, 2 ou 3
II) $p_0 = 1$			instável ou LAE	0, 1, 2 ou 3
III) $p_0 > 1$	III.a) $1 < h < R^{-1}$		instável ou LAE	0, 1 ou 2
	III.b) $R^{-1} < h$		instável ou LAE	0, 1 ou 2

Tabela 1: Síntese dos resultados qualitativos.



### 5.1 Estabilidade do ponto de equilíbrio não trivial

Reescrevendo o modelo dado pelo sistema (2)

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = \mu - \mu s - \beta s i \frac{p_0+p-p(s+i)}{s+hi} = F_1(s, i) \\ \frac{di}{dt} = \beta s i \frac{p_0+p-p(s+i)}{s+hi} - (\mu + \gamma) i = F_2(s, i). \end{cases} \quad (6)$$

As funções  $F_1(s, i)$  e  $F_2(s, i)$  podem ser escritas como

$$\begin{aligned} F_1(s, i) &= \mu - \mu s - \beta s \exp \left[ \frac{p_0 + p - p(s+i)}{s+hi} \ln i \right] \\ F_2(s, i) &= \beta s \exp \left[ \frac{p_0 + p - p(s+i)}{s+hi} \ln i \right] - (\mu + \gamma) i. \end{aligned}$$

A matriz jacobiana do sistema acima (6) é dada por

$$J = \begin{bmatrix} -\mu - \beta\alpha_1(s, i) & -\beta s\alpha_2(s, i) \\ \beta\alpha_1(s, i) & -(\mu + \gamma) + \beta s\alpha_2(s, i) \end{bmatrix} \quad (7)$$

onde

$$\begin{aligned} \alpha_1(s, i) &= i \frac{p_0+p-p(s+i)}{s+hi} \left[ 1 - \frac{p_0 + p + p(h-1)i}{(s+hi)^2} s \ln i \right] \\ \alpha_2(s, i) &= i \frac{p_0+p-p(s+i)}{s+hi} \left[ \frac{p_0 + p - p(s+i)}{(s+hi)i} - \frac{(p_0 + p)h - p(h-1)s}{(s+hi)^2} \ln i \right]. \end{aligned}$$

A estabilidade de cada ponto de equilíbrio não trivial  $(s^*, i^*)$  depende dos autovalores da matriz(7) calculada nesses pontos. Após vários cálculos, obtemos

$$\begin{aligned} \alpha_1(s^*, i^*) &= i^{1-f(i^*)} \left[ 1 - \frac{p_0 + p + p(h-1)i^*}{(s^* + hi^*)^2} s^* \ln i^* \right] \\ \alpha_2(s^*, i^*) &= i^{1-f(i^*)} \left[ \frac{1 - f(i^*)}{i^*} - \frac{(p_0 + p)h - p(h-1)s^*}{(s^* + hi^*)^2} \ln i^* \right]. \end{aligned}$$

O cálculo de  $\det(J^* - \lambda I) = 0$  nos fornece o seguinte polinômio característico

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$$

com

$$\begin{aligned} a_1 &= \mu [\alpha_1(s^*, i^*) + R^{-1} + 1 - \alpha_2(s^*, i^*)] \\ a_2 &= \mu^2 \{ [1 + \alpha_1(s^*, i^*)] R^{-1} - \alpha_2(s^*, i^*) \}. \end{aligned}$$

De acordo com os critérios de estabilidade de Routh-Hurwitz para o caso  $n = 2$  as condições necessárias e suficientes para que o ponto de equilíbrio não trivial  $(s^*, i^*)$  seja localmente estável são  $a_1 > 0$  e  $a_2 > 0$ .

Devido a complexidade das expressões para estes coeficientes, essa análise será feita numericamente, após obter, também numericamente, as coordenadas do ponto  $(s^*, i^*)$ . Entretanto, é fácil ver que quando  $h > 1$  (que é o caso que estamos considerando) temos sempre  $\alpha_1(s^*, i^*) > 0$ .

## 6 Simulações Numéricas

Os valores atribuídos aos parâmetros escolhidos para realizar as simulações numéricas visaram atingir, basicamente, os seguintes resultados:

- a) ter uma visão genérica sobre o comportamento qualitativo do modelo;
- b) ter uma idéia sobre a influência de cada parâmetro no modelo;
- c) detectar possíveis problemas numéricos;
- d) generalizar resultados sobre a estabilidade dos pontos de equilíbrio do modelo.

Desta forma, separamos inicialmente as simulações em 3 casos:  $p_0 < 1$ ,  $p_0 = 1$  e  $p_0 > 1$ . Os valores utilizados para os parâmetros  $\mu$  e  $\gamma$  foram fixados em  $\mu = 0.015$  e  $\gamma = 52$ , correspondendo, respectivamente, à uma expectativa de vida de  $\mu^{-1} \cong 67$  anos e um período de recuperação de  $\gamma^{-1} \cong 7$  dias. Esta escolha nos fornece  $i_{\max} = R^{-1} = 0.0002883$ .

Para cada valor escolhido do parâmetro  $p_0$  (barreira natural), escolhemos dois valores distintos do parâmetro  $p$  (proteção conferida pela imunidade coletiva).

Como ponto de partida para atribuir valores para o parâmetro  $h$  (risco devido aos indivíduos infectados), escolhemos  $h = R^{-1} + \frac{p(R^{-1}-1)}{p_0}$ , que corresponde ao valor para o qual o expoente  $1 - \phi(i)$  é constante. Essa escolha deve-se ao fato de sabermos o comportamento do modelo com relação à quantidade de pontos de equilíbrio (não com relação à estabilidade) nesse caso, uma vez que esse conjunto de parâmetros reproduz o expoente considerado por Liu. A partir desse valor para o parâmetro  $h$ , escolhemos ainda dois valores menores e dois maiores, com o objetivo de observar as mudanças qualitativas do modelo (principalmente com relação à quantidade de equilíbrios não triviais).

Para atribuir valores para o parâmetro  $\beta$  (lembramos que este parâmetro influi apenas no valor de  $R_0^{-1}$  e não na função  $g(i)$ ), verificamos inicialmente que valores possibilitavam cobrir os casos previstos com relação à quantidade de equilíbrios não triviais. Desta maneira, para cada conjunto de valores para os parâmetros  $p_0$ ,  $p$  e  $h$  escolhemos, no mínimo, três valores distintos para  $\beta$ .

Antes de apresentarmos algumas das simulações realizadas, valem algumas observações. No decorrer da realização das simulações numéricas, notamos que:

- O modelo é pouco sensível ao parâmetro  $p$ , isto é, uma grande variação em  $p$  acarreta pouca variação na função  $g(i)$ . Podemos concluir, desta forma, que a imunidade coletiva não é suficiente para determinar, sozinha, grandes alterações no comportamento qualitativo.
- Uma vez fixados os valores dos parâmetros  $p$  e  $p_0$ , a variação do parâmetro  $h$  acarreta mudanças consideráveis no comportamento qualitativo da função  $g(i)$ .

- A estabilidade é determinada, entre outros fatores, por uma relação entre os valores de  $\beta$  e  $h$ . Nas simulações realizadas para o caso  $p_0 < 1$  (para o qual sempre existe pelo menos um ponto de equilíbrio não trivial), verificamos que para alguns valores de  $\beta$  e  $h$ , o ponto de equilíbrio trivial poderia ser estável ou instável. Caso existisse mais de um ponto de equilíbrio não trivial, os maiores eram sempre instáveis e o menor poderia ser estável ou instável, dependendo dos valores de  $\beta$  e  $h$ .
- Apesar de conseguirmos determinar a estabilidade local dos pontos de equilíbrio em todos os casos considerados, problemas de ordem numérica ocorreram na simulação da dinâmica da infecção em alguns casos, como por exemplo: valor de  $i^*$  muito próximo de  $i_{\max}$ , a partir do qual a função  $g(i)$  passaria a ser negativa; existência de mais de um ponto de equilíbrio (um estável e outro instável) com coordenadas de  $i^*$  muito próximas; valor de  $i^*$  estável muito pequeno.

Apresentamos a seguir algumas tabelas com resultados sobre estabilidade.

$h$	$g(i)$	$\beta$	Equilíbrios não-triviais	Estabilidade
50000	Figura 24	0,001	- - -	
		250	0,163083 $10^{-4}$ 0,288325 $10^{-3}$	instável LAE

Tabela 2:  $p_0 = 2, p = 0,001$ .

$h$	$g(i)$	$\beta$	Equilíbrios não-triviais	Estabilidade
10	Figura 23 (I)	0,05	0,873023 $10^{-6}$	LAE
		100	0,132086 $10^{-3}$	instável
4161*	Figura 23 (I)	0,05	0,918149 $10^{-6}$	LAE
		1	0,122416 $10^{-3}$	instável
15000	Figura 23 (II)	0,08	0,374892 $10^{-5}$	LAE
			0,537560 $10^{-4}$	instável
			0,108324 $10^{-4}$	instável
20000	Figura 23 (II)	0,01	0,373267 $10^{-7}$	LAE
		0,05	0,117624 $10^{-5}$	LAE
			0,603745 $10^{-4}$	instável
			0,926458 $10^{-4}$	instável
		1	0,2278395 $10^{-3}$	LAE

Tabela 3:  $p_0 = 0,5, p = 0,1$ .

\* valor para o qual temos  $h = R^{-1} + \frac{p(R^{-1}-1)}{p_0}$

Os gráficos abaixo representam alguns dos comportamentos da solução do modelo, dependendo da condição inicial.

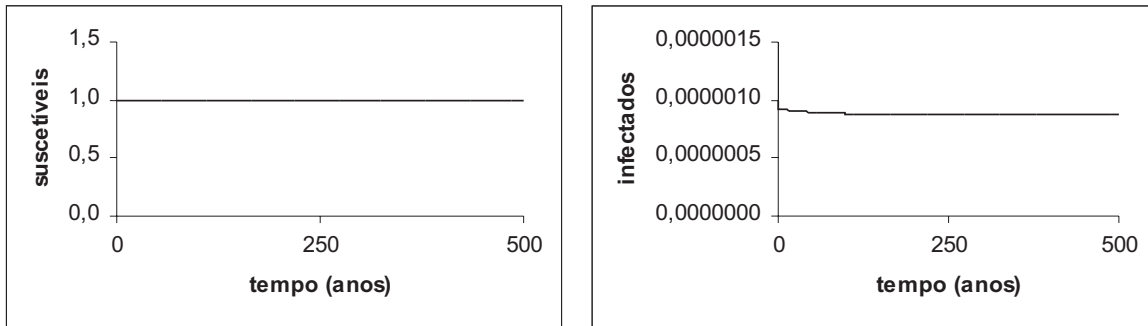


Figura 26:  $p_0 = 0,5$ ;  $p = 0,1$ ;  $h = 10$  e  $\beta = 0,05$ .

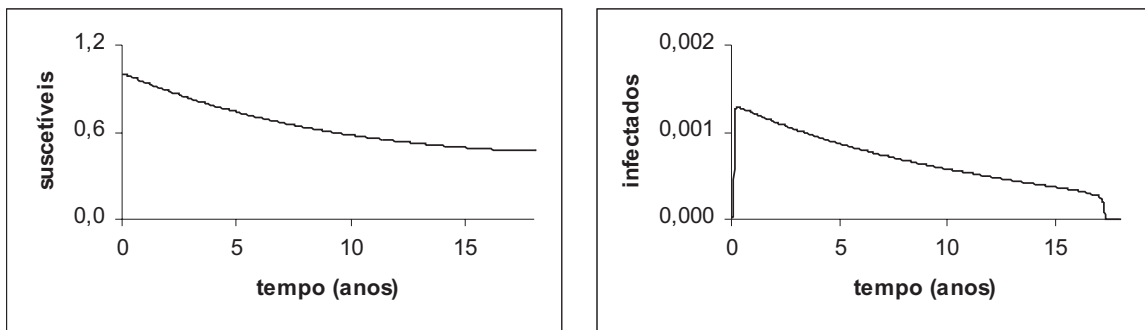


Figura 27:  $p_0 = 0,5$ ;  $p = 0,1$ ;  $h = 15000$  e  $\beta = 0,08$ .

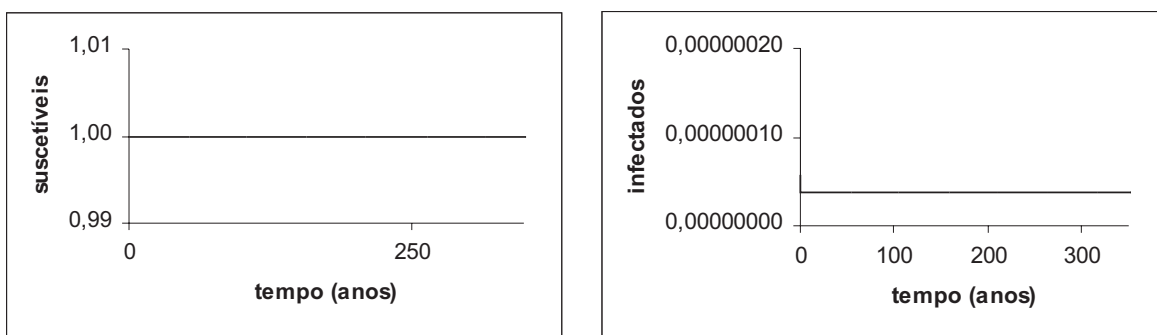


Figura 28:  $p_0 = 0,5$ ;  $p = 0,1$ ;  $h = 20000$  e  $\beta = 0,01$ .

Para os valores dos parâmetros utilizados na Figura 26 temos um único ponto de equilíbrio não trivial localmente estável, para o qual a solução convergiu. Neste caso, para qualquer valor de  $\beta$  sempre existe um único ponto de equilíbrio não trivial, porém

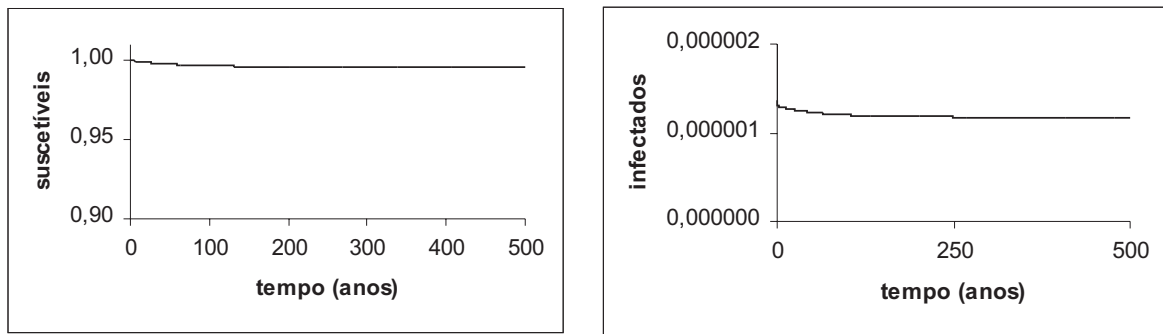


Figura 29:  $p_0 = 0,5$ ;  $p = 0,1$ ;  $h = 20000$  e  $\beta = 0,05$ .

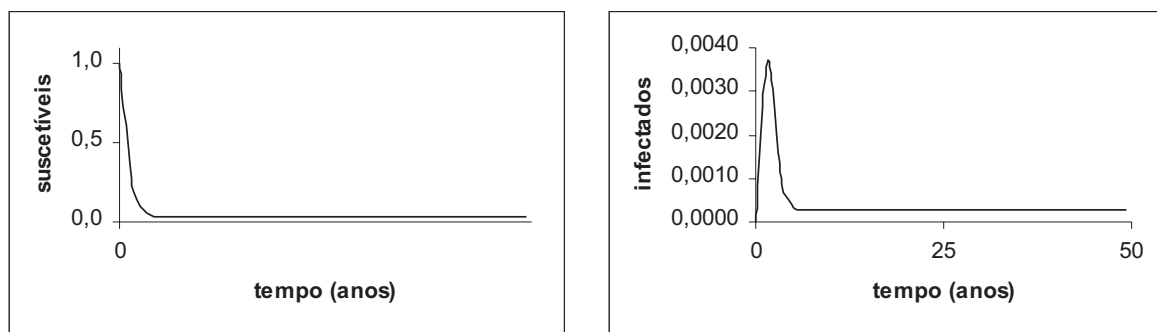


Figura 30:  $p_0 = 0,5$ ;  $p = 0,1$ ;  $h = 20000$  e  $\beta = 1$ .

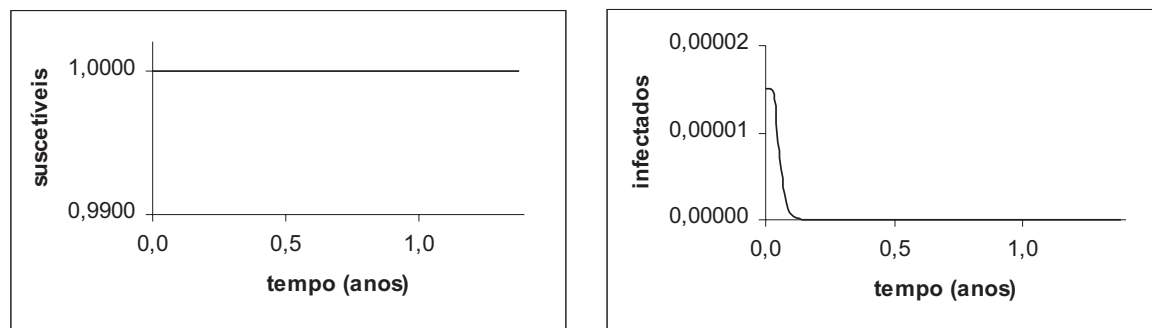


Figura 31:  $p_0 = 2$ ;  $p = 0,001$ ;  $h = 50000$ ,  $\beta = 250$  e  $i_0 = 1,50457 \cdot 10^{-5}$ .

para valores suficientemente grandes de  $\beta$ , este ponto passa a ser instável e ocorrem problemas numéricos nas simulações.

Para os valores dos parâmetros utilizados na Figura 27 existem três equilíbrios não triviais, sendo que apenas o menor deles é localmente assintoticamente estável. Note-mos que, embora o valor de  $i^*$  seja muito pequeno, o ponto não é o trivial, pois  $s^* \neq 1$ . Este fato ( a coordenada de  $i^*$  ser muito próxima de zero) também acarreta problemas numéricos. Podemos observar pelo gráfico, que há uma queda brusca no valor dos

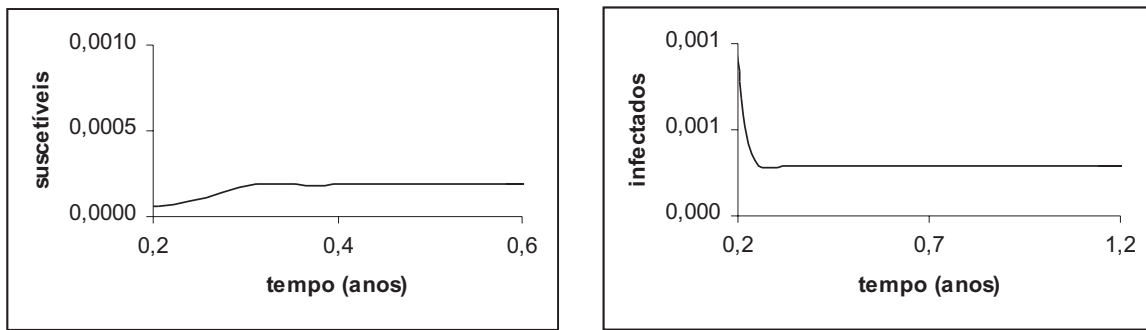


Figura 32:  $p_0 = 2$ ;  $p = 0,001$ ;  $h = 50000$ ,  $\beta = 250$  e  $i_0 = 1,50459 \cdot 10^{-5}$ .

infectados e o fato de  $i^*$  se aproximar de zero gera problemas numéricos devida à instabilidade do ponto de equilíbrio trivial. Novamente neste caso, existem valores de  $\beta$  que tornam o ponto de equilíbrio não trivial instável.

Nas Figuras 28, 29 e 30 variamos apenas o valor do parâmetro  $\beta$ , com o objetivo de visualizar as mudanças no comportamento do modelo de acordo com esse parâmetro. Para  $\beta = 0,01$  (Figura 31), existe apenas um ponto de equilíbrio não trivial localmente estável, para o qual o sistema converge. Para  $\beta = 0,05$  (Figura 29), existem três pontos de equilíbrios não triviais, sendo localmente estável apenas o menor deles. Novamente a solução tende à esse ponto. Já para  $\beta = 1$  (Figura 30), o modelo volta a ter apenas um equilíbrio não trivial, ainda localmente estável. A medida que  $\beta$  cresce, esse ponto passa de estável para instável.

Já nas Figuras 31 e 32 apenas a condição inicial foi alterada e detectamos que a fração limiar inicial de infectados que define se a doença se estabelece ou não na população, está no intervalo  $(0,0521735; 0,052174)$ .

Obs: Os resultados dos valores utilizados para  $\beta$  relacionados às Figuras 26 à 30 encontram-se na Tabela 3 e os valores utilizados nas Figuras 31 e 32 correspondem à Tabela 2.

## Referências

- [1] Capasso, V. e Serio, G. *A generalization of the Kermack-McKendrick deterministic epidemic model*, Mathematical Biosciences, 42, pp. 43-61, 1978.
- [2] Hethcote, H. W. e Van den Driessche, P. *Some epidemiological models with nonlinear incidence*, Journal of Mathematical Biology, 29, pp. 271-287, 1991.
- [3] Liu, W., Hethcote, H. W. e Levin, S. A. *Dynamical behavior of epidemiological models with nonlinear incidence rates*, Journal of Mathematical Biology, 25, pp. 359-380, 1987.