Biomatemática 9 (1999) 119-*140* *ISSN 1679-365X*
Uma publicação do grupo de Biomatemática IMECC - Unicamp

Taxa de Incidência Não-Bilinear Dependente dos Indivíduos Infectados e Recuperados

Maria Beatriz F. Leite
UNICAMP - IMECC
Depto. de Matemática Aplicada
bialeite@ime.unicamp.br

Rodney C. Bassanezi
UNICAMP - IMECC
Depto. de Matemática
rodney@ime.unicamp.br

Hyun M. Yang
UNICAMP - IMECC
Depto. de Matemática Aplicada
hyunyang@ime.unicamp.br

1 Introdução

A não homogeneidade da população pode ser incorporada nos modelos matemáticos de epidemiologia modificando-se, por exemplo, a taxa de incidência (taxa com a qual novas infecções ocorrem). Nos modelos epidemiológicos clássicos, onde considera-se a taxa de incidência bilinear, supõe-se, de maneira geral, que os indivíduos estão distribuídos homogeneamente na população e que a quantidade de novas infecções é proporcional ao número de encontros entre indivíduos suscetíveis e infectados (βIS). Este é o caso mais simples, no qual a taxa cresce com o crescimento de suscetíveis e infectados. Porém, essa suposição nem sempre é adequada, dependendo do fenômeno a ser modelado. A fim de citar algumas situações nas quais a não bilinearidade na taxa de incidência pode ser necessária, citamos: a) efeito de saturação na propagação da infecção dependendo da quantidade de infectados presente, uma vez que parece razoável que o número de contatos de um indivíduo suscetível com indivíduos infectados por unidade de tempo não possa crescer sempre linearmente [Capasso [1]]; b) a necessidade de exposições múltiplas ao patógeno para que ocorra a infecção [Hethcote [2]]. Podemos ainda utilizar taxas não bilineares para descrever as situações nas quais é relevante considerar a heterogeneidade genética dos indivíduos. Isto pode acarretar diferentes respostas imunológicas, diferentes eficiências de transmissão de acordo com a quantidade de vírus presente no organismo, diferentes grau de suscetibilidade, o que tornaria alguns indivíduos mais suscetíveis do que outros.

Neste trabalho, apresentamos um modelo com taxa não bilinear que generaliza a taxa proposta por Liu [3] $\beta I^p S$, considerando-se o expoente p como uma função ϕ que depende do número de indivíduos e que descreve, em certo sentido, a facilidade ou oposição à propagação da infecção. Inicialmente, exigiremos que a função ϕ seja

contínua, positiva, monótona, sem pontos de inflexão. O fato da função potência depender das densidades de indivíduos suscetíveis, infectados e recuperados tem como objetivo refletir aspectos como, por exemplo, a hostilidade do ambiente (que desfavorece a propagação de uma doença), a imunidade coletiva conferida pelos indivíduos imunes, o risco representado pelos infectados, etc.

2 O Modelo

Consideremos um modelo SIR com uma taxa de incidência na qual permitimos que o valor da potência do modelo de Liu [3] dependa do número de indivíduos de cada classe.

Admitimos que as "proteções" sejam uma medida de como os indivíduos imunes e o ambiente se opõe a um contato adequado (dificultando a propagação da doença), e o "risco" indique a habilidade da transmissão da infecção quando um contato adequado ocorre entre suscetíveis e infectados.

Dessa forma, as suposições que determinam esta dependência são:

a) a heterogeneidade espacial e a imunidade "coletiva" contribuem para levar o sistema ao ponto de equilíbrio trivial. Assumimos que a proteção fornecida pela imunidade coletiva obedece a uma relação linear com relação a r, enquanto que o termo constante $\overline{p}_0$ representa barreiras naturais. Assim a ***função de "proteção"*** considerada pode ser dada por: $\phi_{\overline{p}}(r) = \overline{p}_0 + \overline{p}r$.

b) o risco representado pelos portadores contribuem para levar o sistema ao ponto de equilíbrio não trivial. Assumimos novamente uma relação linear para esta forma de risco com relação a s e i, isto é, a ***função de "risco"*** é dada por: $\phi_{\overline{h}}(s,i) = as + \overline{h}i$.

Note que se $\overline{p}_0 > \overline{p}$ então o ambiente é hostil para o espalhamento da doença e esta hostilidade protege mais os indivíduos suscetíveis do que a imunidade coletiva. Por outro lado, é razoável supor que os infectados provocam um risco maior do que os suscetíveis e, nesse sentido supomos $\overline{h} > a$.

Considerando as duas suposições acima, isto é, os indivíduos imunes mais o ambiente podem ser considerados como barreiras contra o espalhamento da infecção, enquanto que indivíduos suscetíveis e infectados facilitam a transmissão do vírus, a ***função potência de infecciosidade*** ϕ é descrita por

$$\phi \;=\; \frac{\phi_{\overline{p}}}{\phi_{\overline{h}}} \;\Rightarrow\; \phi(s,i) \;=\; \frac{p_0 + p(1-s-i)}{s+hi}, \tag{1}$$

onde $p_0 = \overline{p}_0/a$, $p = \overline{p}/a$, $h = \overline{h}/a$ e $r = 1 - s - i$.

Os parâmetros p e p_0 representam, respectivamente, as proteções conferidas pela imunidade coletiva e pelo ambiente, e h é o risco devido aos portadores distribuídos de forma heterogênea na comunidade.

A partir das suposições acima, nosso modelo é descrito pelas equações:

$$\begin{cases} \dfrac{ds}{dt} &= \mu - [\lambda(s,i) + \mu]\, s \\ \dfrac{di}{dt} &= [\lambda(s,i)] - (\mu + \gamma)\, i, \end{cases} \tag{2}$$

onde $r = 1 - s - i$ e $\lambda(s,i) = \beta i^{\phi(s,i)} s$ é a força de infecção não linear com $\phi(s,i)$ dada por (1).

3 Pontos de Equilíbrio

Os pontos de equilíbrio do sistema (2) são:

- Ponto de equilíbrio trivial $P_0 = (1,0)$, correspondente a ausência de infecção na população, que sempre existe, pois como $p_0 > 0$, temos

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt}\,|_{(1,0)} &= \mu - \left[\beta i^{\phi(1,0)} + \mu\right] s &= \mu - [\beta 0^{p_0} + \mu] &= 0 \quad \text{e} \\ \frac{di}{dt}\,|_{(1,0)} &= \beta 0^{p_0} &= 0. \end{aligned}$$

- Os pontos de equilíbrio não triviais $P^* = (s^*, i^*)$, com $i^* \neq 0$ que são as soluções do sistema

$$\begin{cases} g(i) &= R_0^{-1} \\ s &= 1 - R^{-1} i, \end{cases} \tag{3}$$

onde

$$R = \frac{\mu}{\mu + \gamma}$$

e

$$R_0 = \frac{\beta}{\mu + \gamma}.$$

Usando o fato que no equilíbrio a quantidade de indivíduos suscetíveis é dada por $s = 1 - R^{-1} i$, obtemos

$$f(i) = \frac{1 - p_0 - [p(R^{-1} - 1) + R^{-1} - h]\, i}{1 - (R^{-1} - h)\, i}. \tag{4}$$

As soluções viáveis do sistema (3) devem permanecer no intervalo $0 < i \leq i_m = R$.

4 Estabilidade do Equilíbrio Trivial

As conclusões sobre a estabilidade do ponto de equilíbrio trivial P_0 são obtidas a partir da análise do sistema (2) numa vizinhança do ponto $(1,0)$, novamente a partir da expressão para a variação da fração de indivíduos infecciososque é dada por

$$\frac{di}{dt} = \left[\beta s i^{\phi(s,i)-1} - (\mu+\gamma)\right] i.$$

Substituindo a expressão para $\phi(s,i)$ dada em (1) e usando o fato que $s+i+r=1$, obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{di}{dt} &= \left[\beta s i^{\frac{p_0-1+(p+1)r-(h-1)i}{1-r+(h-1)i}} - (\mu+\gamma)\right] i \\ &\leq \beta\left[i^{\frac{p_0-1+(p+1)r-(h-1)i}{1-r+(h-1)i}} - R_0^{-1}\right] i,\end{aligned}$$

pois $1 \geq 1-r-i = s$.

A estabilidade do ponto de equilíbrio trivial depende do comportamento da função $i^{\frac{p_0-1+(p+1)r-(h-1)i}{1-r+(h-1)i}}$. Como nossa função potência ϕ depende também dos indivíduos imunes, definimos

$$\Omega(r_f) = \sup_{0<i<i_m} i^{\frac{p_0-1+(p+1)r_f-(h-1)i}{1-r_f+(h-1)i}} \tag{5}$$

para um valor fixo r_f da fração dos indivíduos imunes. Assim, podemos escrever

$$\frac{di}{dt} \leq \beta[\Omega(r_f) - R_0^{-1}]i.$$

Se $\Omega(r_f) \leq R_0^{-1}$ teremos $\frac{di}{dt} < 0$ e o ponto de equilíbrio trivial será estável. Se $\Omega(r_f) > R_0^{-1}$ não podemos concluir nada a respeito da estabilidade do ponto trivial.

Vamos analisar as possíveis regiões de atração do ponto de equilíbrio trivial $P_0 = (1,0)$ em função dos valores de i e r dependendo do sinal do expoente. Como já comentamos acima, consideraremos $\overline{h} > a$, o que implica considerarmos $h > 1$. Desta forma, o sinal do expoente depende apenas do numerador, $p_0 - 1 + (p+1)r - (h-1)i$. Escrevendo r em função de i, obtemos $r = \frac{(h-1)i+1-p_0}{p+1}$, e desta forma r depende linearmente de i. Basta portanto verificar o sinal do expoente nos semi-planos limitados pela reta.

Caso 1:

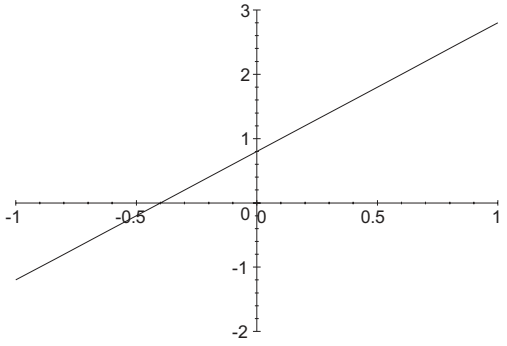


Figura 1: $r(i) = \frac{(h-1)i+1-p_0}{p+1}$ quando $0 < p_0 \leq 1$.

Na região A (semi-plano que não contém a origem), o expoente $-f(i)$ é positivo e na região B (semi-plano que contém a origem), o expoente é negativo. Numa vizinhança do ponto de equilíbrio trivial no início da doença, isto é, fazendo $r_f = 0$ e i suficientemente pequeno, temos

$$\frac{dr}{dt} = \gamma i - \mu r \cong \gamma i > 0, \text{ para } i > 0$$

e

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} &= \beta \left[(1-r-i) i^{\frac{p_0-1+(p+1)r-(h-1)i}{1-r+(h-1)i}} - R_0^{-1} \right] i \\ &\cong \beta \left[(1-i) i^{\frac{p_0-1-(h-1)i}{1+(h-1)i}} - R_0^{-1} \right] i, \end{aligned}$$

e para i suficientemente pequeno teremos $\frac{di}{dt} > 0$, pois o expoente é negativo. No semi plano que contém a origem o expoente é negativo e portanto o ponto trivial $(0,0)$ é instável. Se a solução em algum instante t encontra-se no semi plano oposto, temos várias possibilidades. Se houver um ponto de equilíbrio não trivial P^* estável, então a solução pode tender a ele. Se não houver tal ponto nesta região, então a solução pode ser atraída para o semi plano que contém a origem e neste caso não se estabilizar.

Portanto no caso $0 < p_0 \leq 1$, o ponto de equilíbrio trivial é sempre instável.

Caso 2:

Na região A (semi-plano que contém a origem), temos que o expoente $-f(i)$ é positivo e na região B (semi-plano que não contém a origem), o expoente é negativo. No início da doença, logo após a introdução da infecção na comunidade, a fração de indivíduos imunes pode ser desprezada. Em outras palavras, fazendo $r_f = 0$ em (5), obtemos

$$\Omega = \Omega(0) = \sup_{0<i<i_m} i^{\frac{p_0-1-(h-1)i}{1+(h-1)i}}.$$

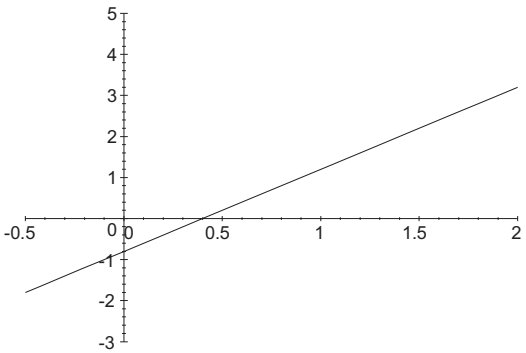


Figura 2: $r(i) = \frac{(h-1)i+1-p_0}{p+1}$ quando $p_0 > 1$.

Notemos que

$$\left(i^{\frac{p_0-1-(h-1)i}{1+(h-1)i}}\right)' = \left(e^{\frac{p_0-1-(h-1)i}{1+(h-1)i}\ln i}\right)\left(\frac{p_0-1-(h-1)i}{1+(h-1)i}\frac{1}{i} + \ln i\frac{-p_0(h-1)}{[1+(h-1)i]^2}\right)$$

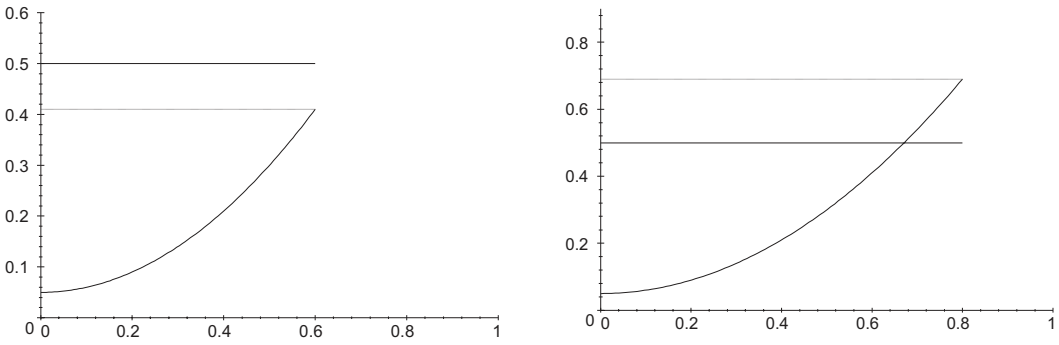
e, portanto, a função $i^{\frac{p_0-1-(h-1)i}{1+(h-1)i}}$ é crescente quando $p_0 > 1$ e $i < i_c = \frac{p_0-1}{h-1}$. Isto implica que $\Omega(0)$ ocorre em i_c.

Se $\Omega(0) \leq R_0^{-1}$ então $\frac{di}{dt} < 0$ e a doença não se estabelece; o ponto trivial é estável. Contudo, se $\Omega(0) > R_0^{-1}$, no intervalo $0 < i < i_c$ existe um valor limiar da fração de infectados, $\hat{\imath}$ para o qual $(\hat{\imath})^{\frac{p_0-1-(h-1)\hat{\imath}}{1+(h-1)\hat{\imath}}} = R_0^{-1} = \Omega^*$. Neste caso, para valores de i tais que $i < \hat{\imath}$ teremos $i^{\frac{p_0-1-(h-1)i}{1+(h-1)i}} < R_0^{-1}$ e assim quando a condição inicial i_0 satisfaz $i_0 < \hat{\imath}$ a doença não se estabelece; o ponto trivial é estável. Para valores de i tais que $i > \hat{\imath}$ teremos $i^{\frac{p_0-1-(h-1)i}{1+(h-1)i}} > R_0^{-1}$ e assim quando a condição inicial i_0 satisfaz $i_0 > \hat{\imath}$ a doença pode se estabelecer. No gráfico abaixo representamos a reta R_0^{-1} e um esboço da curva $i^{\frac{p_0-1-(h-1)i}{1+(h-1)i}}$ até $i = i_c$.

Até i_c a função cresce. Se $\Omega(0) < R_0^{-1}$ (caso I) para qualquer valor de i tal que $i < i_c$ a doença não se estabelece. Se $\Omega(0) > R_0^{-1}$ (caso II), então existe um valor de i, $\hat{\imath}$, para o qual abaixo dele garantimos que a doença não se estabelece. Acima desse valor a doença pode se estabelecer. Portanto, se a barreira natural p_0 é suficientemente grande é possível erradicar a doença no início do processo nos casos: a) R_0 é suficientemente pequeno tal que $\Omega(0) < R_0^{-1}$; b) a fração inicial de infectados está abaixo do valor limiar $\hat{\imath}$ mesmo quando $\Omega(0) > R_0^{-1}$.

Vale a pena notar que essa análise tem sentido somente no início do processo de espalhamento da doença, quando $r \sim 0$, e além disso, neste caso temos

$$\frac{di}{dt} \cong \beta\left[i^{\frac{p_0-1-(h-1)i}{1+(h-1)i}} - R_0^{-1}\right]i,$$



(I) (II)

Figura 3: $i^{\phi(i)-1} = i^{\frac{p_0-1-(h-1)i}{1+(h-1)i}}$ para $\Omega < R_0^{-1}$ (I) e $\Omega > R_0^{-1}$ (II).

pois $1 - r - i \cong 1$.

Devido a este fato, nas simulações numéricas com valores $\hat{\imath} \cong R_0^{-1}$ o sistema tende para o ponto de equilíbrio trivial.

5 Ponto de Equilíbrio Não Trivial

A análise da quantidade de equilíbrios não triviais existente para o sistema (2) em questão será feita considerando-se as condições de equilíbrio, ou seja, substituindo $s^* = 1 - R^{-1}i$ e usando o fato que $r = 1 - s - i$. Assim passamos a trabalhar com uma função de uma variável, ou seja

$$\phi(i) = \frac{p_0 + pi(R^{-1} - 1)}{1 - (R^{-1} - h)i}$$

e

$$f(i) = 1 - \phi(i) = \frac{1 - p_0 - [p(R^{-1} - 1) + R^{-1} - h]\, i}{1 - (R^{-1} - h)\, i}.$$

Temos ainda

$$\begin{aligned} \phi(0) &= 1 - p_0 \\ f'(i) &= \frac{-p(R^{-1} - 1) - p_0(R^{-1} - h)}{[1 - (R^{-1} - h)i]^2}. \end{aligned}$$

- Se $f'(i) < 0$ e $f(i) > 0$ então a função $g(i)$ é decrescente;
- Se $f'(i) < 0$ e $f(i) < 0$ ou $f'(i) > 0$ então a função $g(i)$ pode ser crescente ou decrescente.

Neste caso, a análise do comportamento da função $f(i)$ dada por (4) será feita através de um estudo geométrico a partir das expressões de seu numerador e denominador.

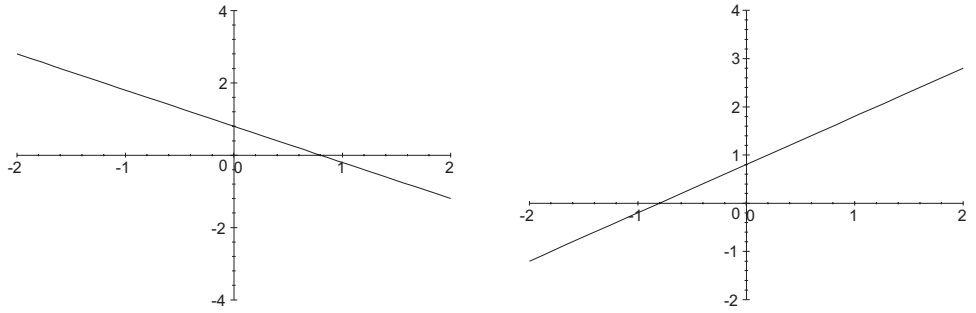
Sejam

$$\begin{aligned} n(i) &= 1 - p_0 - [p(R^{-1} - 1) + R^{-1} - h]\, i \text{ e} \\ d(i) &= 1 - (R^{-1} - h)i \end{aligned}$$

as expressões para o numerador e denominador de $f(i)$, respectivamente. Temos que $n(i_1) = 0$ e $d(i_2) = 0$ com

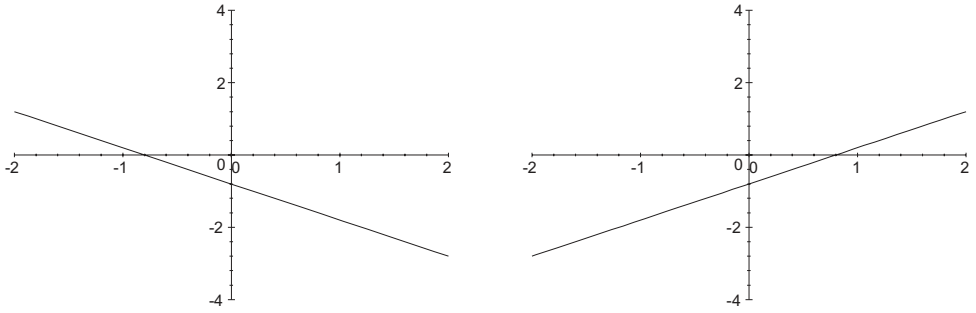
$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{1 - p_0}{R^{-1}(p+1) - (p+h)} \\ i_2 &= \frac{1}{R^{-1} - h}. \end{aligned}$$

As possibilidades para os gráficos de $n(i)$ e $d(i)$ são mostrados nas Figuras 4, 5, 6 e 7:



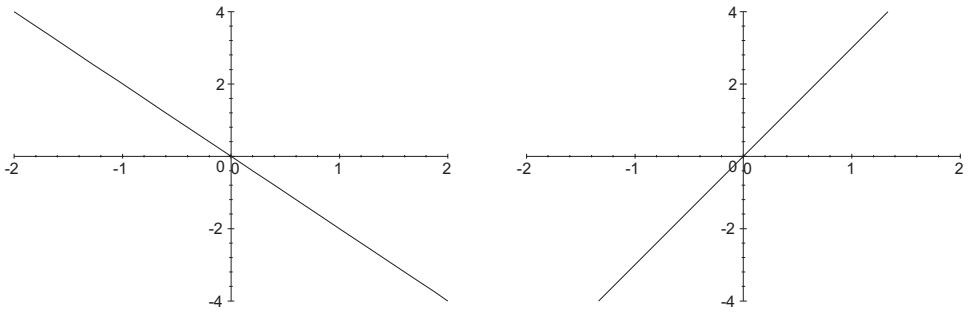
(a) (b)

Figura 4: Gráfico de $n(i)$ quando $0 < p_0 < 1$ e (a) $p > \frac{h-R^{-1}}{R^{-1}-1}$, (b) $p < \frac{h-R^{-1}}{R^{-1}-1}$.



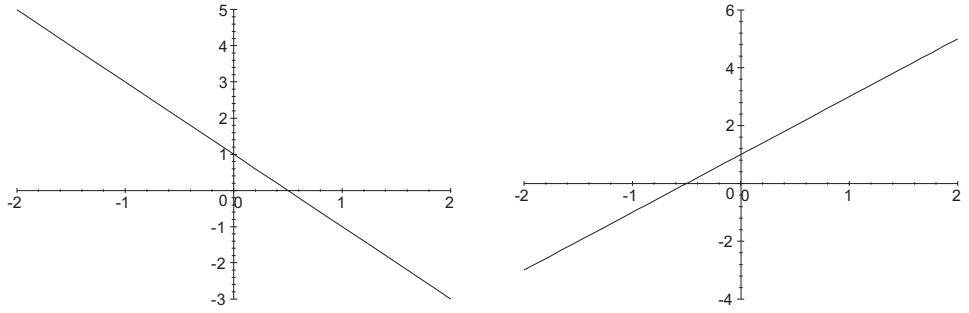
(a) (b)

Figura 5: Gráfico de $n(i)$ quando $p_0 > 1$ e (a) $p > \frac{h-R^{-1}}{R^{-1}-1}$, (b) $p < \frac{h-R^{-1}}{R^{-1}-1}$.



(a) (b)

Figura 6: Gráfico de $n(i)$ quando $p_0 = 1$ e (a) $p > \frac{h-R^{-1}}{R^{-1}-1}$, (b) $p < \frac{h-R^{-1}}{R^{-1}-1}$.



(a) (b)

Figura 7: Gráfico de $d(i)$ quando (a) $R^{-1} > h$ e (b) $R^{-1} < h$.

O sinal da função $f(i)$ bem como da sua derivada $f'(i)$ depende das posições relativas de i_1 e i_2 e como o intervalo de interesse é $0 < i < i_m = R$, essa análise depende dos valores de

$$\begin{aligned} i_m - i_1 &= \frac{R^{-1}(p+1) - (p+h) - R^{-1}(1-p_0)}{R^{-1}(R^{-1}(p+1) - (p+h))} \\ i_m - i_2 &= \frac{-h}{R^{-1}(R^{-1}-h)} \\ i_1 - i_2 &= \frac{(R^{-1}-h)(1-p_0) - R^{-1}(p+1) + p + h}{(R^{-1}(p+1) - (p+h))(R^{-1}-h)} \end{aligned}$$

e temos as possibilidades descritas a seguir. Nos gráficos abaixo, a linha cheia (—) representa o gráfico de $d(i)$ (denominador de $f(i)$), enquanto que a linha pontilhada (- - -) representa o gráfico de $n(i)$ (numerador de $f(i)$).

Caso (A) $0 < p_0 < 1$ e $R^{-1} > h$. Observe que neste caso temos sempre $p > \frac{h-R^{-1}}{R^{-1}-1}$.

A.1) $p > \frac{h-R^{-1}p_0}{R^{-1}-1}$. Isto implica que $0 < i_1 < i_m < i_2$.

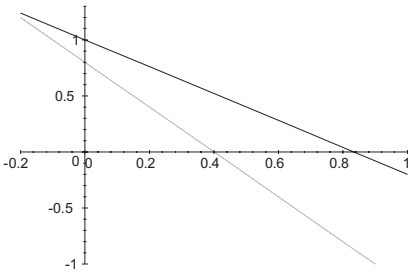


Figura 8: $n(i)$ (- - -) e $d(i)$ (—) no caso (A.1).

A.2) $p < \frac{h-R^{-1}p_0}{R^{-1}-1}$. Isto implica que $0 < i_m < i_1 < i_2$.

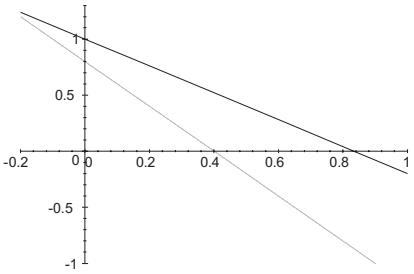


Figura 9: $n(i)$ (- - -) e $d(i)$ (—) no caso (A.2).

Caso (B) $0 < p_0 < 1$ e $R^{-1} < h$.

B.1) $p > \frac{h-R^{-1}}{R^{-1}-1}$.

B.1.1)$p > \frac{h-R^{-1}p_0}{R^{-1}-1}$. Isto implica que $i_2 < 0 < i_1 < i_m$.

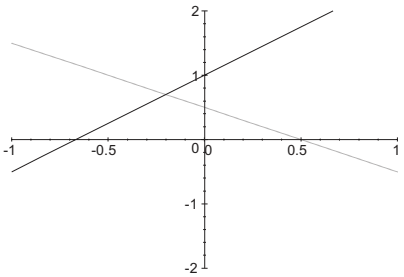


Figura 10: $n(i)$ (- - -) e $d(i)$ (—) no caso (B.1.1).

B.1.2) $p < \frac{h-R^{-1}p_0}{R^{-1}-1}$. Isto implica que $i_2 < 0 < i_m < i_1$.

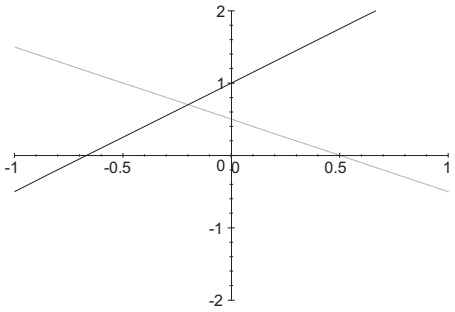


Figura 11: $n(i)$ (- - -) e $d(i)$ (—) no caso (B.1.2).

B.2) $p < \frac{h-R^{-1}}{R^{-1}-1}$.

B.2.1) $p > \frac{p_0(h-R^{-1})}{R^{-1}-1}$. Isto implica que $i_1 < i_2 < 0 < i_{m.}$

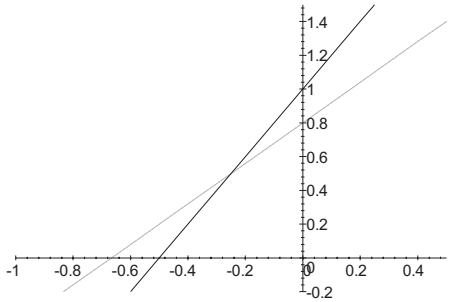


Figura 12: $n(i)$ (- - -) e $d(i)$ (—) no caso (B.2.1).

B.2.2) $p < \frac{p_0(h-R^{-1})}{R^{-1}-1}$. Isto implica que $i_2 < i_1 < 0 < i_m$.

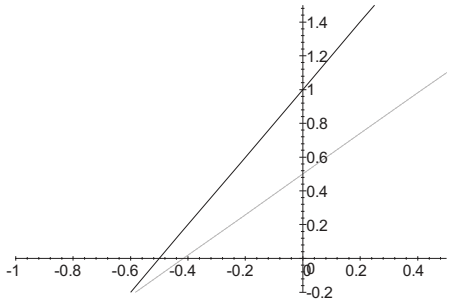


Figura 13: $n(i)$ (- - -) e $d(i)$ (—) no caso (B.2.2).

Caso (C) $p_0 > 1$ e $R^{-1} > h$. Observe que neste caso temos sempre $p > \frac{h-R^{-1}}{R^{-1}-1}$ e isto implica que $i_1 < 0 < i_m < i_2$.

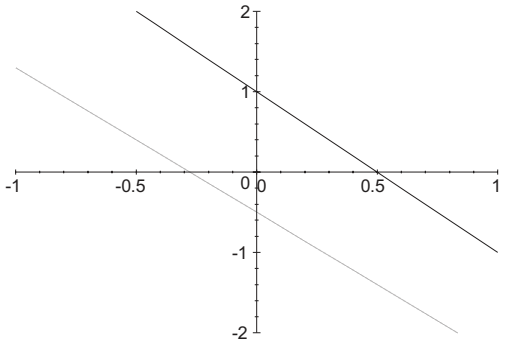


Figura 14: $n(i)$ (- - -) e $d(i)$ (—) no caso (C).

Caso (D) $p_0 > 1$ e $R^{-1} < h$.

D.1) $p < \frac{h-R^{-1}}{R^{-1}-1}$.

D.1.1) $p < \frac{h-R^{-1}p_0}{R^{-1}-1}$. Isto implica que $i_2 < 0 < i_1 < i_{m.}$

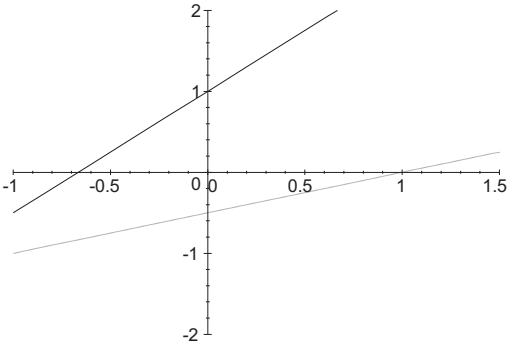


Figura 15: $n(i)$ (- - -) e $d(i)$ (—) no caso (D.1.1).

D.1.2) $p > \frac{h-R^{-1}p_0}{R^{-1}-1}$. Isto implica que $i_2 < 0 < i_m < i_1$.

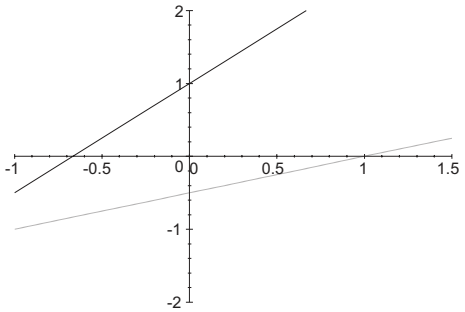


Figura 16: $n(i)$ (- - -) e $d(i)$ (—) no caso (D.1.2).

D.2) $p > \frac{h-R^{-1}}{R^{-1}-1}$.

D.2.1) $p > \frac{p_0(h-R^{-1})}{R^{-1}-1}$. Isto implica que $i_2 < i_1 < 0 < i_{m.}$

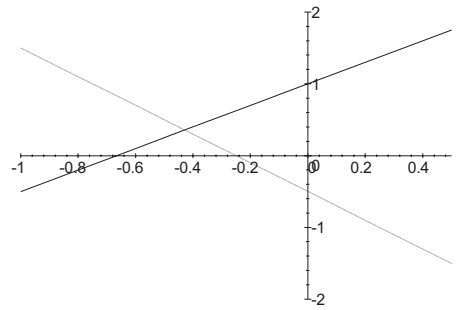


Figura 17: $n(i)$ (- - -) e $d(i)$ (—) no caso (D.2.1).

D.2.2) $p < \frac{p_0(h-R^{-1})}{R^{-1}-1}$. Isto implica que $i_1 < i_2 < 0 < i_m$.

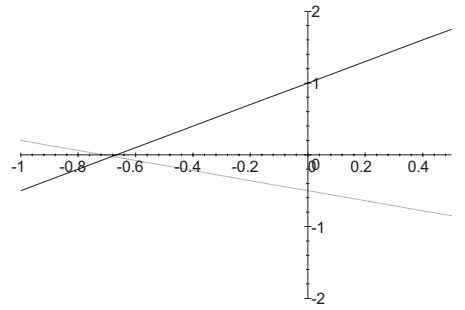


Figura 18: $n(i)$ (- - -) e $d(i)$ (—) no caso (D.2.2).

Caso (E) $p_0 = 1$ e $R^{-1} > h$. Observe que neste caso temos sempre $p > \frac{h-R^{-1}}{R^{-1}-1}$ e isto implica que $0 < i_1 < i_m < i_2$.

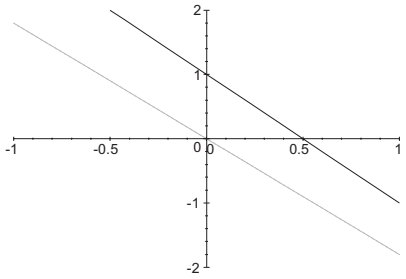


Figura 19: $n(i)$ (- - -) e $d(i)$ (—) no caso (E).

Caso (F) $p_0 = 1$ e $R^{-1} < h$.

F.1) $p > \frac{h-R^{-1}}{R^{-1}-1}$. Isto implica que $i_2 < i_1 = 0 < i_m$.

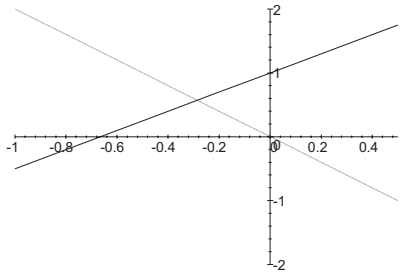


Figura 20: $n(i)$ (- - -) e $d(i)$ (—) no caso (F.1).

F.2) $p < \frac{h-R^{-1}}{R^{-1}-1}$. Isto implica que $i_2 < i_1 = 0 < i_m$.

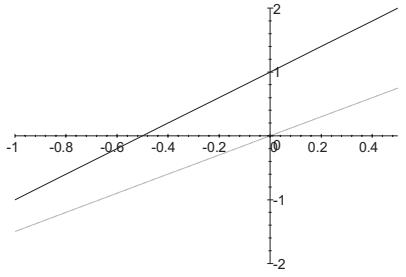


Figura 21: $n(i)$ (- - -) e $d(i)$ (—) no caso (F.2).

A partir destas informações, representamos graficamente os possíveis comportamentos para a função $g(i)$.

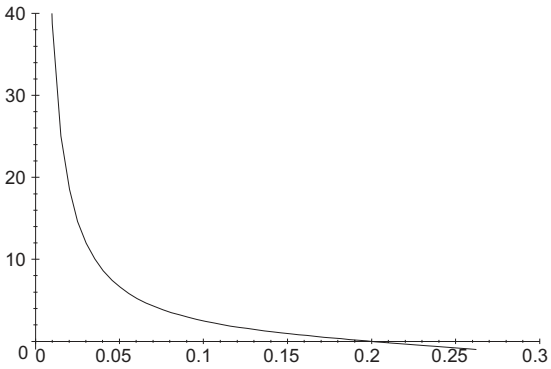


Figura 22: $g(i)$ nos casos (A.2), (B.1.2), (B.2.1).

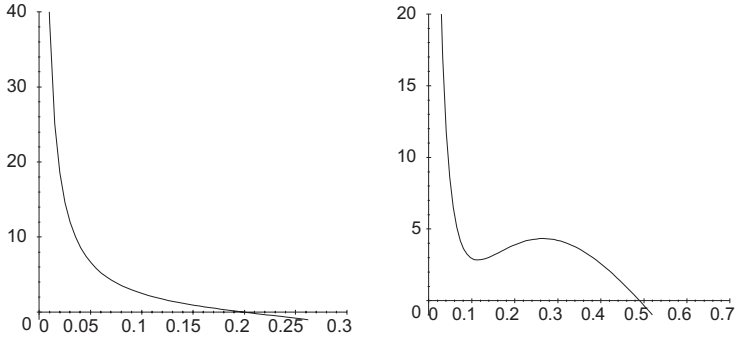


Figura 23: $g(i)$ nos casos (A.1), (B.1.1), (B.2.2).

Nos casos (B.1.1) e (B.2.2) a função $g(i)$ pode apresentar diferentes comportamentos, dependendo dos valores dos parâmetros, conforme os seguintes gráficos:

Já nos casos (C), (D.1.1), (D.1.2), (D.2.1) e (D.2.2) o comportamento qualitativo da função $g(i)$ é sempre o mesmo, exceto sua inclinação próximo à origem. Temos que $\lim_{i\to 0} g'(i) = 0$ se $p_0 > 2$ e $\lim_{i\to 0} g'(i) = \infty$ se $1 < p_0 < 2$. Assim temos os seguintes gráficos possíveis:

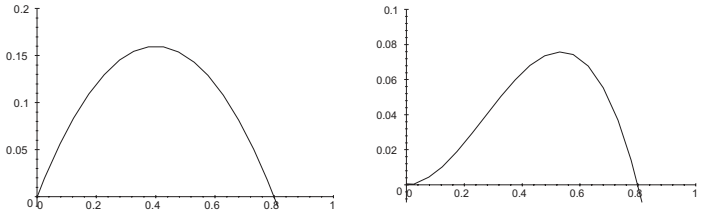


Figura 24: $g(i)$ nos casos(C), (D.1.1), (D.1.2), (D.2.1), (D.2.2).

Finalmente para os casos (E) e (F), que correspondem ao caso particular $p_0 = 1$ temos as seguintes possibilidades:

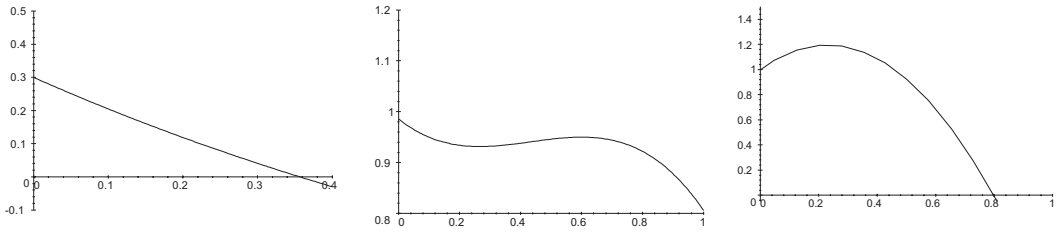


Figura 25: $g(i)$ nos casos(E), (F.1) e (F.2).

Desta forma, podemos sintetizar os principais resultados qualitativos na Tabela 1:

Caso	**Condições**		**Equilíbrio trivial**	**Quantidade de equilíbrios não triviais**
I) $0 < p_0 < 1$	I.a) $1 < h < R^{-1}$		instável	1
	I.b) $R^{-1} < h$	$0 < p < \frac{p_0(h-R^{-1})}{R^{-1}-1}$	instável	1, 2 ou 3
		$\frac{p_0(h-R^{-1})}{R^{-1}-1} < p < \frac{h-R^{-1}}{R^{-1}-1}$	instável	1
		$\frac{h-R^{-1}}{R^{-1}-1} < p < \frac{h-R^{-1}p_0}{R^{-1}-1}$	instável	1
		$\frac{h-R^{-1}}{R^{-1}-1} < \frac{h-R^{-1}p_0}{R^{-1}-1} < p$	instável	1, 2 ou 3
II) $p_0 = 1$			instável ou LAE	0, 1, 2 ou 3
III) $p_0 > 1$	III.a) $1 < h < R^{-1}$		instável ou LAE	0, 1 ou 2
	III.b) $R^{-1} < h$		instável ou LAE	0, 1 ou 2

Tabela 1: Síntese dos resultados qualitativos.

5.1 Estabilidade do ponto de equilíbrio não trivial

Reescrevendo o modelo dado pelo sistema (2)

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{ds}{dt} &=& \mu - \mu s - \beta s i^{\frac{p_0+p-p(s+i)}{s+hi}} \quad = \quad F_1(s,i) \\ \dfrac{di}{dt} &=& \beta s i^{\frac{p_0+p-p(s+i)}{s+hi}} - (\mu+\gamma)\, i \quad = \quad F_2(s,i). \end{array}\right. \tag{6}$$

As funções $F_1(s,i)$ e $F_2(s,i)$ podem ser escritas como

$$\begin{aligned} F_1(s,i) &= \mu - \mu s - \beta s \exp\left[\frac{p_0+p-p(s+i)}{s+hi}\ln i\right] \\ F_2(s,i) &= \beta s \exp\left[\frac{p_0+p-p(s+i)}{s+hi}\ln i\right] - (\mu+\gamma)\, i. \end{aligned}$$

A matriz jacobiana do sistema acima (6) é dada por

$$J = \left[\begin{array}{cc} -\mu - \beta\alpha_1(s,i) & -\beta s\alpha_2(s,i) \\ \beta\alpha_1(s,i) & -(\mu+\gamma) + \beta s\alpha_2(s,i) \end{array}\right] \tag{7}$$

onde

$$\begin{aligned} \alpha_1(s,i) &= i^{\frac{p_0+p-p(s+i)}{s+hi}}\left[1 - \frac{p_0+p+p(h-1)i}{(s+hi)^2} s\ln i\right] \\ \alpha_2(s,i) &= i^{\frac{p_0+p-p(s+i)}{s+hi}}\left[\frac{p_0+p-p(s+i)}{(s+hi)i} - \frac{(p_0+p)\,h - p(h-1)s}{(s+hi)^2}\ln i\right]. \end{aligned}$$

A estabilidade de cada ponto de equilíbrio não trivial (s^*, i^*) depende dos autovalores da matriz(7) calculada nesses pontos. Após vários cálculos, obtemos

$$\begin{aligned} \alpha_1(s^*,i^*) &= i^{1-f(i^*)}\left[1 - \frac{p_0+p+p(h-1)i^*}{(s^*+hi^*)^2} s^*\ln i^*\right] \\ \alpha_2(s^*,i^*) &= i^{1-f(i^*)}\left[\frac{1-f(i^*)}{i^*} - \frac{(p_0+p)\,h - p(h-1)s^*}{(s^*+hi^*)^2}\ln i^*\right]. \end{aligned}$$

O cálculo de $\det(J^* - \lambda I) = 0$ nos fornece o seguinte polinômio característico

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$$

com

$$\begin{aligned} a_1 &= \mu\left[\alpha_1(s^*,i^*) + R^{-1} + 1 - \alpha_2(s^*,i^*)\right] \\ a_2 &= \mu^2\left\{\left[1+\alpha_1(s^*,i^*)\right]R^{-1} - \alpha_2(s^*,i^*)\right\}. \end{aligned}$$

De acordo com os critérios de estabilidade de Routh-Hurwitz para o caso $n = 2$ as condições necessárias e suficientes para que o ponto de equilíbrio não trivial (s^*, i^*) seja localmente estável são $a_1 > 0$ e $a_2 > 0$.

Devido a complexidade das expressões para estes coeficientes, essa análise será feita numericamente, após obter, também numericamente, as coordenadas do ponto (s^*, i^*). Entretanto, é fácil ver que quando $h > 1$ (que é o caso que estamos considerando) temos sempre $\alpha_1(s^*, i^*) > 0$.

6 Simulações Numéricas

Os valores atribuídos aos parâmetros escolhidos para realizar as simulações numéricas visaram atingir, basicamente, os seguintes resultados:

a) ter uma visão genérica sobre o comportamento qualitativo do modelo;

b) ter uma idéia sobre a influência de cada parâmetro no modelo;

c) detectar possíveis problemas numéricos;

d) generalizar resultados sobre a estabilidade dos pontos de equilíbrio do modelo.

Desta forma, separamos inicialmente as simulações em 3 casos: $p_0 < 1$, $p_0 = 1$ e $p_0 > 1$. Os valores utilizados para os parâmetros μ e γ foram fixados em $\mu = 0.015$ e $\gamma = 52$, correspondendo, respectivamente, à uma expectativa de vida de $\mu^{-1} \cong 67$ anos e um período de recuperação de $\gamma^{-1} \cong 7$ dias. Esta escolha nos fornece $i_{\max} = R^{-1} = 0.0002883$.

Para cada valor escolhido do parâmetro p_0 (barreira natural), escolhemos dois valores distintos do parâmetro p (proteção conferida pelos imunidade coletiva).

Como ponto de partida para atribuir valores para o parâmetro h (risco devido aos indivíduos infectados), escolhemos $h = R^{-1} + \frac{p(R^{-1}-1)}{p_0}$, que corresponde ao valor para o qual o expoente $1 - \phi(i)$ é constante. Essa escolha deve-se ao fato de sabermos o comportamento do modelo com relação à quantidade de pontos de equilíbrio (não com relação à estabilidade) nesse caso, uma vez que esse conjunto de parâmetros reproduz o expoente considerado por Liu. A partir desse valor para o parâmetro h, escolhemos ainda dois valores menores e dois maiores, com o objetivo de observar as mudanças qualitativas do modelo (principalmente com relação à quantidade de equilíbrios não triviais).

Para atribuir valores para o parâmetro β (lembremos que este parâmetro influi apenas no valor de R_0^{-1} e não na função $g(i)$), verificamos inicialmente que valores possibilitavam cobrir os casos previstos com relação à quantidade de equilíbrios não triviais. Desta maneira, para cada conjunto de valores para os parâmetros p_0, p e h escolhemos, no mínimo, três valores distintos para β.

Antes de apresentarmos algumas das simulações realizadas, valem algumas observações. No decorrer da realização das simulações numéricas, notamos que:

- O modelo é pouco sensível ao parâmetro p, isto é, uma grande variação em p acarreta pouca variação na função $g(i)$. Podemos concluir, desta forma, que a imunidade coletiva não é suficiente para determinar, sozinha, grandes alterações no comportamento qualitativo.

- Uma vez fixados os valores dos parâmetros p e p_0, a variação do parâmetro h acarreta mudanças consideráveis no comportamento qualitativo da função $g(i)$.

- A estabilidade é determinada, entre outros fatores, por uma relação entre os valores de β e h. Nas simulações realizadas para o caso $p_0 < 1$ (para o qual sempre existe pelo menos um ponto de equilíbrio não trivial), verificamos que para alguns valores de β e h, o ponto de equilíbrio trivial poderia ser estável ou instável. Caso existisse mais de um ponto de equilíbrio não trivial, os maiores eram sempre instáveis e o menor poderia ser estável ou instável, dependendo dos valores de β e h.

- Apesar de conseguirmos determinar a estabilidade local dos pontos de equilíbrio em todos os casos considerados, problemas de ordem numérica ocorreram na simulação da dinâmica da infecção em alguns casos, como por exemplo: valor de i^* muito próximo de $i_{\max}$, a partir do qual a função $g(i)$ passaria a ser negativa; existência de mais de um ponto de equilíbrio (um estável e outro instável) com coordenadas de i^* muito próximas; valor de i^* estável muito pequeno.

Apresentamos a seguir algumas tabelas com resultados sobre estabilidade.

h	$g(i)$	β	**Equilíbrios não-triviais**	Estabilidade
50000	Figura 24	$0,001$	- - -	
		250	$0,163083\ \ 10^{-4}$	instável
			$0,288325\ \ 10^{-3}$	LAE

Tabela 2: $p_0 = 2, p = 0,001$.

h	$g(i)$	β	**Equilíbrios não-triviais**	Estabilidade
10	Figura 23 (I)	$0,05$	$0,873023\ \ 10^{-6}$	LAE
		100	$0,132086\ \ 10^{-3}$	instável
4161^*	Figura 23 (I)	$0,05$	$0,918149\ \ 10^{-6}$	LAE
		1	$0,122416\ \ 10^{-3}$	instável
15000	Figura 23 (II)	$0,08$	$0,374892\ \ 10^{-5}$	LAE
			$0,537560\ \ 10^{-4}$	instável
			$0,108324\ \ 10^{-4}$	instável
20000	Figura 23 (II)	$0,01$	$0,373267\ \ 10^{-7}$	LAE
		$0,05$	$0,117624\ \ 10^{-5}$	LAE
			$0,603745\ \ 10^{-4}$	instável
			$0,926458\ \ 10^{-4}$	instável
		1	$0,2278395\ \ 10^{-3}$	LAE

Tabela 3: $p_0 = 0,5, p = 0,1$.
* valor para o qual temos $h = R^{-1} + \frac{p(R^{-1}-1)}{p_0}$

Os gráficos abaixo representam alguns dos comportamentos da solução do modelo, dependendo da condição inicial.

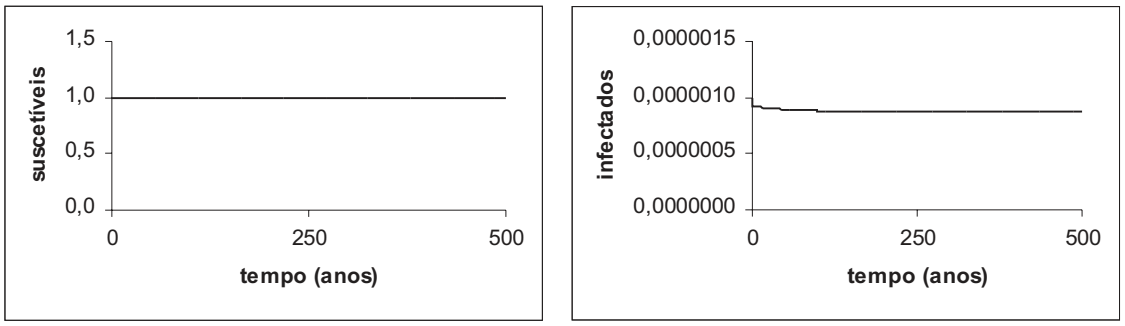


Figura 26: $p_0 = 0,5; p = 0,1; h = 10$ e $\beta = 0,05$.

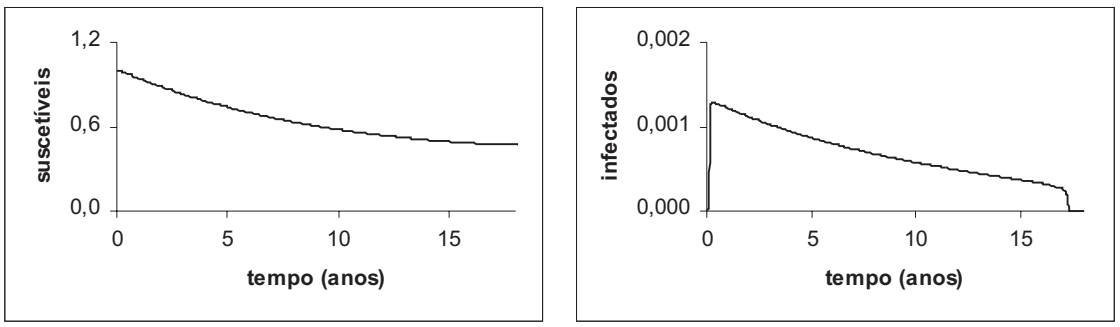


Figura 27: $p_0 = 0,5; p = 0,1; h = 15000$ e $\beta = 0,08$.

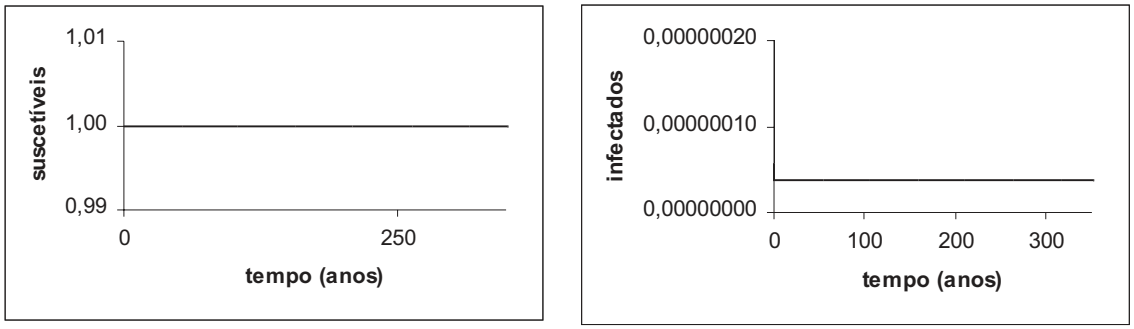


Figura 28: $p_0 = 0,5; p = 0,1; h = 20000$ e $\beta = 0,01$.

Para os valores dos parâmetros utilizados na Figura 26 temos um único ponto de equilíbrio não trivial localmente estável, para o qual a solução convergiu. Neste caso, para qualquer valor de β sempre existe um único ponto de equilíbrio não trivial, porém

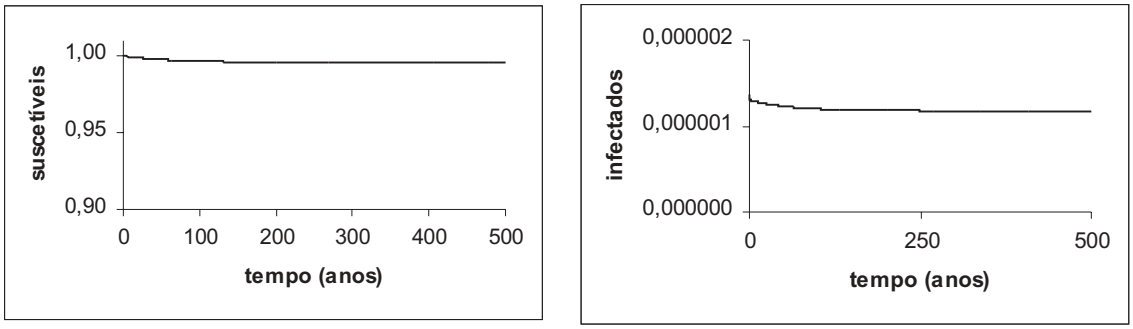


Figura 29: $p_0 = 0,5; p = 0,1; h = 20000$ e $\beta = 0,05$.

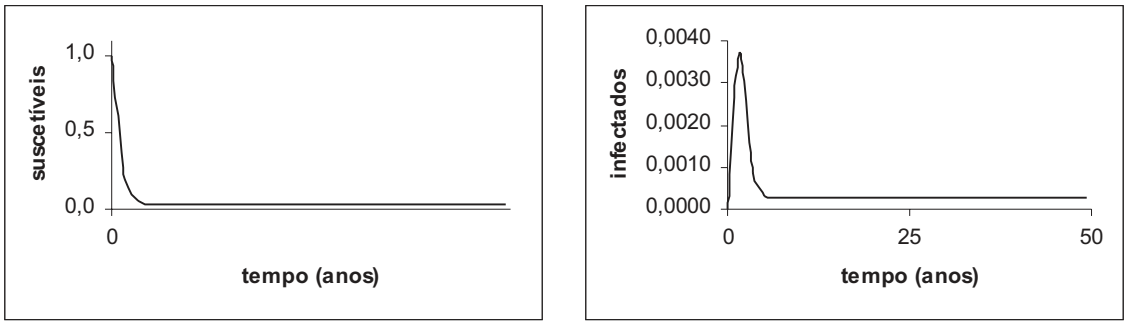


Figura 30: $p_0 = 0,5; p = 0,1; h = 20000$ e $\beta = 1$.

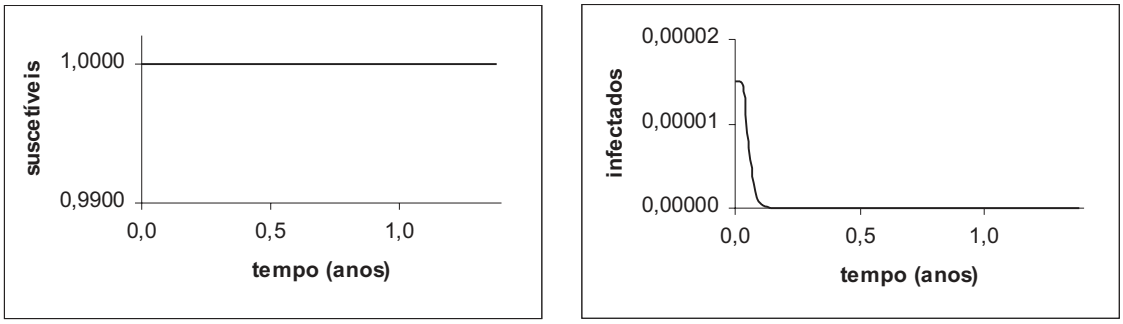


Figura 31: $p_0 = 2; p = 0,001; h = 50000, \beta = 250$ e $i_0 = 1,50457\ \ 10^{-5}$.

para valores suficientemente grandes de β, este ponto passa a ser instável e ocorrem problemas numéricos nas simulações.

Para os valores dos parâmetros utilizados na Figura 27 existem três equilíbrios não triviais, sendo que apenas o menor deles é localmente assintoticamente estável. Notemos que, embora o valor de i^* seja muito pequeno, o ponto não é o trivial, pois $s^* \neq 1$. Este fato (a coordenada de i^* ser muito próxima de zero) também acarreta problemas numéricos. Podemos observar pelo gráfico, que há uma queda brusca no valor dos

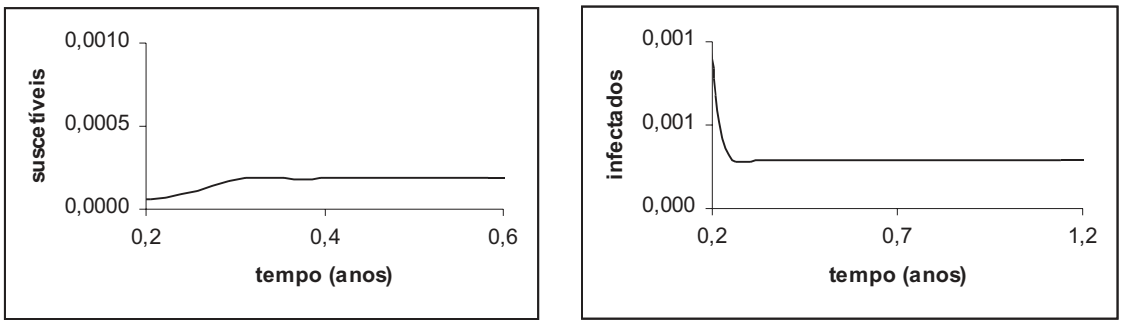


Figura 32: $p_0 = 2; p = 0,001; h = 50000, \beta = 250$ e $i_0 = 1,50459\ \ 10^{-5}$.

infectados e o fato de i^* se aproximar de zero gera problemas numéricos devida à instabilidade do ponto de equilíbrio trivial. Novamente neste caso, existem valores de β que tornam o ponto de equilíbrio não trivial instável.

Nas Figuras 28, 29 e 30 variamos apenas o valor do parâmetro β, com o objetivo de visualizar as mudanças no comportamento do modelo de acordo com esse parâmetro. Para $\beta = 0,01$ (Figura 31), existe apenas um ponto de equilíbrio não trivial localmente estável, para o qual o sistema converge. Para $\beta = 0,05$ (Figura 29), existem três pontos de equilíbrios não triviais, sendo localmente estável apenas o menor deles. Novamente a solução tende à esse ponto. Já para $\beta = 1$ (Figura 30), o modelo volta a ter apenas um equilíbrio não trivial, ainda localmente estável. A medida qua β cresce, esse ponto passa de estável para instável.

Já nas Figuras 31 e 32 apenas a condição inicial foi alterada e detectamos que a fração limiar inicial de infectados que define se a doença se estabelece ou não na população, está no intervalo $(0, 0521735; 0, 052174)$.

Obs: Os resultados dos valores utilizados para β relacionados às Figuras 26 à 30 encontram-se na Tabela 3 e os valores utilizados nas Figuras 31 e 32 correspondem à Tabela 2.

Referências

[1] Capasso, V. e Serio, G. *A generalization of the Kermack-McKendrick deterministic epidemic model*, Mathematical Biosciences, 42, pp. 43-61, 1978.

[2] Hethcote, H. W. e Van den Driessche, P. *Some epidemiological models with nonlinear incidence*, Journal of Mathematical Biology, 29, pp. 271-287, 1991.

[3] Liu, W., Hethcote, H. W. e Levin, S. A. *Dynamical behavior of epidemiological models with nonlinear incidence rates*, Journal of Mathematical Biology, 25, pp. 359-380, 1987.