

# Modelos Interespecíficos para Controle Químico de Áreas Foliares Lesionadas por Fungos

Renata Zotin

UNESP - Rio Claro  
Depto. de Matemática  
rzotin@rc.unesp.br

Rodney C. Bassanezi

UNICAMP - IMECC  
Depto. de Matemática Aplicada  
rodney@ime.unicamp.br

Hyun M. Yang

UNICAMP - IMECC  
hyunyang@ime.unicamp.br

## Resumo

Apresentamos um modelo para o estudo de uma população de fungos, sujeita a um controle químico, incorporando o efeito da aplicação do fungicida diretamente no modelo e medindo a população de fungos em termos de área lesionada. Os parâmetros, a princípio, são considerados constantes. Posteriormente, são realizadas algumas simulações a título de exemplificação e comparação com o caso constante, considerando a taxa aparente de infecção dependente do tempo (e da temperatura).

## 1 Introdução

Num primeiro trabalho tomamos, como uma primeira aproximação para o estudo de uma população de fungos sujeita a um controle químico, um modelo partindo do princípio que, na ausência de fungicida, o crescimento de cada subpopulação (sensíveis e resistentes) é exponencial. Além disso, o tecido do hospedeiro é considerado ilimitado e não existem competições inter e intra específicas (modelo linear). Com isto, vimos que, ao considerar a taxa de crescimento como função do tempo,  $r = r(t)$ , não obtivemos informações adicionais significativas [13].

Como uma tentativa de incorporar as competições inter e intra específicas, Barrett [2] utilizou o modelo geral de Kolmogorov considerando a dinâmica de duas populações  $N_1$  e  $N_2$  que interagem, com taxas de crescimento intrínseco  $r_1$  e  $r_2$ , respectivamente, dada por

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 f_1(N_1, N_2) \\ \frac{dN_2}{dt} = r_2 N_2 f_2(N_1, N_2). \end{cases} \quad (1)$$

As funções  $f_1$  e  $f_2$  descrevem os efeitos das competições inter e intra específicas entre as suas populações.

Se o tecido hospedeiro é limitado, uma aproximação razoável para as funções  $f_1$  e  $f_2$  são aquelas descritas nas equações do modelo de competição Lotka-Volterra,

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 \left[ 1 - \frac{N_1}{K_1} - a \frac{N_2}{K_2} \right] \\ \frac{dN_2}{dt} = r_2 N_2 \left[ 1 - b \frac{N_1}{K_2} - \frac{N_2}{K_2} \right], \end{cases} \quad (2)$$

onde:

- $K_1$  e  $K_2$  são as capacidades suporte das populações  $N_1$  e  $N_2$ , respectivamente;
- $a$  e  $b$  descrevem a forma de interação entre as duas populações. Por exemplo, se  $a < 0$ , a taxa de crescimento de  $N_1$  é favorecida pela população  $N_2$ .

Quando a doença estudada é do tipo foliar, frequentemente é mais conveniente a utilização da proporção de área da folha que é afetada pela doença como um indicador da severidade da doença. Neste caso, tanto as equações (1) como as equações (2) continuam com o mesmo aspecto:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1 x g_1(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = a_2 y g_2(x, y), \end{cases} \quad (3)$$

onde  $x$  e  $y$  são as proporções da área foliar lesionada por cada uma das populações e  $a_1$  e  $a_2$  são as respectivas taxas aparentes de infecção.

Se usarmos as equações de Lotka-Volterra temos

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1 x [1 - x - ay] \\ \frac{dy}{dt} = a_2 y [1 - bx - y]. \end{cases} \quad (4)$$

Barrett salienta algumas simplificações presentes no modelo (4), dentre as quais destacamos:

- todos os parâmetros do modelo são considerados constantes e, conseqüentemente, fatores abióticos não exercem nenhuma influência sobre as taxas de reprodução e competição entre as populações;
- efeitos de saturação afetam todos os indivíduos de maneira homogênea;

- a população ou não tem estrutura etária ou mantém uma estrutura etária estável.

Os efeitos das competições inter e intra específicas foram incorporados por Varassin [12] numa extensão do modelo proposto por Ghini et al.[8], para o estudo do crescimento de uma população de fungos subdivida em sensíveis ( $S$ ) e resistentes ( $R$ ), tomando a seguinte forma:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = r_s S \left[ 1 - \frac{S}{K} - c_{SR} \frac{R}{K} \right] - \alpha r_s S \left[ 1 - \frac{S}{K} - c_{SR} \frac{R}{K} \right] \\ \frac{dR}{dt} = r_R R \left[ 1 - \frac{R}{K} - c_{RS} \frac{S}{K} \right] + \alpha r_s S \left[ 1 - \frac{S}{K} - c_{SR} \frac{R}{K} \right], \end{cases} \quad (5)$$

onde

- $K$  é a capacidade suporte, que pode ser dada pelo número de propágulos ou pela área foliar lesionada, dependendo de como a população de fungos está sendo quantificada;
- $r_S$  e  $r_R$  são as taxas aparentes de infecção;
- $c_{SR}$  e  $c_{RS}$  medem a intensidade da interação ente  $S$  e  $R$ ;
- o termo  $\alpha r_s S [1 - S/K - c_{SR}R/K]$  representa o fluxo de sensíveis para resistentes, onde  $\alpha$  é a frequência de mudança.

Este modelo é portanto um caso particular do modelo de Lotka-Volterra descrito pelas equações (2) e uma análise dos pontos de equilíbrio e estabilidade também é apresentada em [12].

Neste trabalho propomos uma extensão do modelo descrito pelas equações (5) incorporando o efeito da aplicação do fungicida diretamente no modelo e medindo a população de fungos em termos de área lesionada. Embora já salientado por Barrett como uma das simplificações do modelo, os parâmetros serão considerados constantes. Posteriormente, serão realizadas algumas simulações a título de exemplificação e comparação com o caso constante, considerando a taxa aparente de infecção dependente do tempo (e da temperatura). Outra simplificação a ser considerada no modelo é a área foliar sendo constante, embora a doença possa ser detectada num momento em que a área foliar não esteja totalmente estabilizada.

A partir disso, pretendemos obter uma estratégia de controle ótima no sentido de minimizar tanto o fungicida aplicado quanto a área lesionada pela população de fungos durante o intervalo de tempo decorrido, entre o momento em que a doença é detectada ( $t = 0$ ) e o momento da colheita ( $t = t_f$ ).

Mesmo com as várias limitações do modelo, ficará clara a dificuldade de obtenção de resultados analíticos durante a análise do problema de controle ótimo. Essa dificuldade

está centrada essencialmente na inclusão de termos fortemente não lineares no modelo proposto. O auxílio das simulações computacionais se tornaram de fundamental importância na investigação do tipo de controle factível com o problema, assim como a direção a ser seguida para a demonstração de tal fato.

## 2 Modelo 3: Controle de Área Lesionada ( $r$ Constante)

O modelo que propomos para o controle de fungos com aplicação de fungicidas em populações que desenvolvem resistência está sujeito às seguintes hipóteses:

- a) A "população" de fungos (representada pela área total ocupada  $N$ ) analisada em uma certa cultura é subdividida em sensíveis e resistentes, sendo que  $S(t)$  e  $R(t)$  representam a fração de área foliar da cultura lesionada por sensíveis e resistentes, respectivamente, em cada instante de tempo. Inicialmente, antes da aplicação de fungicida, temos as condições iniciais dadas por  $S(0) = S_0 > 0$  e  $R(0) = R_0 > 0$ ;
- b) as taxas aparentes de infecção provocadas por sensíveis e resistentes são  $r_s$  e  $r_r$ , respectivamente;
- c) a taxa de mudança de sensível para resistente é dada por  $\alpha$ ;
- d) a eficácia do fungicida aplicado é dada por  $\beta$  e incorpora o fato da mesma depender da concentração do fungicida utilizado;
- e) a taxa de aplicação de fungicida é dada por  $u = u(t)$ , função contínua por partes. Além disso, utilizamos uma limitação nessa aplicação da forma  $0 \leq u(t) \leq 1$ , ou seja, consideramos  $u$  sempre em relação a um valor  $u_{max}$  permitido;
- f) consideramos também que  $dS/dt > 0$  e  $dR/dt > 0$  no sentido de, uma vez que uma folha é atacada por fungos, a área lesionada não mais se regenera, mesmo com a aplicação de fungicida.

Com estas considerações formulamos o seguinte modelo matemático:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{S}(t) = (1 - \alpha)r_s S(1 - S - R)(1 - \beta u) \\ \dot{R}(t) = r_r R(1 - S - R) + \alpha r_s S(1 - S - R)(1 - \beta u), \\ S(0) = S_0, R(0) = R_0, \quad 0 \leq u(t) \leq 1. \end{array} \right. \quad (6)$$

Embora  $S$ ,  $R$ ,  $N$  e  $u$  sejam funções de  $t$ , estaremos omitindo a variável  $t$  para simplificarmos a notação.

Tratando o sistema (6) em termos da área total ocupada e considerando  $r_s = r_r = r$ , o sistema (6) pode ser escrito como:

$$\begin{cases} \dot{N}(t) = rN(1 - N)(1 - \beta u) + rR\beta u(1 - N) \\ \dot{R}(t) = rR(1 - N) + \alpha r(N - R)(1 - N)(1 - \beta u), \\ N(0) = N_0 = S_0 + R_0, \quad 0 \leq u(t) \leq 1. \end{cases} \quad (7)$$

O sistema (7), na ausência de fungicida ( $u = 0$ ), foi analisado por Varassin [12] com o objetivo principal de determinar o tamanho da população (ou área lesionada) resistente em uma dada população  $N_0$ .

O problema de controle ótimo associado à dinâmica (7) consiste em encontrar  $u^*(t)$  que minimiza o funcional

$$J(u) = N(t_f) + c_1 \int_0^{t_f} u(t)dt, \quad (8)$$

ou seja,  $J(u^*) = \min_u N(t_f) + c_1 \int_0^{t_f} u(t)dt$ .

Consideramos o tempo final ( $t_f$ ) fixo, que corresponde ao dia da colheita ou ao tempo máximo em que é permitida a aplicação do fungicida.

Introduzindo o Hamiltoniano [9] associado a este problema (omitindo a variável  $t$  de  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ ) temos:

$$H(t, u, \lambda_1, \lambda_2, S, R) = c_1 u + \lambda_1 [rN(1 - N)(1 - \beta u) + rR\beta u(1 - N)] + \lambda_2 [rR(1 - N) + \alpha r(N - R)(1 - N)(1 - \beta u)]. \quad (9)$$

As equações adjuntas (ou de coestado), em função do Hamiltoniano, são dadas por

$$\dot{\lambda}_1^* = -\partial H / \partial N \quad \text{e} \quad \dot{\lambda}_2^* = -\partial H / \partial R$$

que, na sua forma já simplificada, são descritas por:

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1^* + [r(1 - \beta u^*)(1 - 2N^*) - r\beta R^* u^*] \lambda_1^* = rR^* \lambda_2^* - \\ \quad - \lambda_2^* \alpha r(1 - \beta u^*)(1 - 2N^* + R^*) \\ \dot{\lambda}_2^* + r(1 - N^*)[1 - \alpha(1 - \beta u^*)] \lambda_2^* = -\lambda_1^* r\beta u^*(1 - N^*) \\ \text{com} \quad \lambda_1^*(t_f) = 1 \quad \text{e} \quad \lambda_2^*(t_f) = 0. \end{cases} \quad (10)$$

As condições finais sobre  $\lambda_1^*$  e  $\lambda_2^*$  vêm do fato de  $t_f$  ser fixo e  $N^*(t_f)$  e  $R^*(t_f)$  serem livres.

Voltando ao Hamiltoniano dado por (9) e simplificando as expressões obtemos:

$$H(t, u, \lambda_1, \lambda_2, S, R) = [c_1 - r(1 - N)(N - R)\beta(\lambda_1 + \alpha\lambda_2)]u + \lambda_1 r N(1 - N) + \lambda_2 r R(1 - N) + \alpha r \lambda_2 (N - R)(1 - N). \quad (11)$$

Assim, denotando a função que decide o controle por  $g(t)$ , vem

$$g(t) = c_1 - r(1 - N)(N - R)\beta(\lambda_1 + \alpha\lambda_2), \quad (12)$$

e portanto,  $u^*(t)$  é dado por:

$$u^*(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } g(t) > 0 \\ 1 & \text{se } g(t) < 0 \\ \text{indet.} & \text{se } g(t) = 0. \end{cases} \quad (13)$$

A não linearidade do modelo torna as equações diferenciais para  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  complicadas do ponto de vista analítico, tornando-se praticamente impossível uma análise através das expressões para  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ . Conseqüentemente, a análise da função  $g(t)$  para a obtenção da lei de controle ótimo não é imediata.

Optamos assim por "investigar" quais tipos de controles são factíveis através de demonstrações por absurdo, ou seja, supõe-se que o controle tem um determinado aspecto e chega-se a uma contradição caso ele não seja factível.

**Lema 1** *Se o controle ótimo for zero ( $u^*(t) = 0$ ) durante algum intervalo  $(\bar{t}, t_f]$  então  $u^*(t) = 0$   $\forall t \in [0, t_f]$ , considerando  $\alpha \approx 0$ .*

*Dem:*

Suponha que o controle seja da forma

$$u^*(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \bar{t} \\ 0, & \bar{t} < t \leq t_f, \end{cases} \quad (14)$$

ou seja, o controle acaba com zero e tem uma única troca em  $\bar{t}$  ( $g(\bar{t}) = 0$ ).

Como  $u^*(t) = 0$  para  $t \in (\bar{t}, t_f]$  temos  $g(t) > 0$  neste intervalo, e as equações diferenciais (10) para  $\lambda_1^*$  e  $\lambda_2^*$  tomam a seguinte forma:

$$\dot{\lambda}_2^* + r(1 - N^*)(1 - \alpha)\lambda_2^* = 0 \quad (15)$$

$$\dot{\lambda}_1^* + r(1 - 2N^*)\lambda_1^* = -\lambda_2^*[-rR^* + \alpha r(1 - 2N^* + R^*)]$$

Usando o fato de conhecermos  $\lambda_2^*$  em  $t = t_f$ , obtemos como solução de (15)

$$\lambda_2^*(t) = \lambda_2^*(t_f) \int_t^{t_f} r(1 - \alpha)(1 - N)ds = 0, \quad \forall t \in (\bar{t}, t_f],$$

pois  $\lambda_2^*(t_f) = 0$ .

Conseqüentemente, temos como solução para  $\lambda_1^*$ , usando o fato de  $\lambda_1^*(t_f) = 1$

$$\lambda_1^*(t) = e^{\int_t^{t_f} r(1-2N^*) ds} > 0, \quad \forall t \in (\bar{t}, t_f].$$

Analisando o comportamento de  $g(t)$ , a função que decide o controle, temos:

$$g'(t) = r^2\beta(1 - N^*)(N^* - R^*) [\alpha\lambda_1^*(1 - N^*) + \lambda_2^*[(\alpha - 1)R^* + \alpha(1 - N^*)]] .$$

Tomando  $\alpha \approx 0$  (na prática está no intervalo  $10^{-9} < \alpha < 10^{-5}$ ) e  $\lambda_2^* = 0$ , temos  $g'(t) = 0 \forall t \in (\bar{t}, t_f] \Rightarrow g(t) = constante > 0, \forall t \in (\bar{t}, t_f]$ . Pela continuidade de  $g(t)$ , não é possível  $g(\bar{t}) = 0$ , ou seja,  $\bar{t}$  suposto inicialmente não existe. Assim,  $u^*(t) = 0, \forall t \in [0, t_f]$ . ♦

Do lema anterior, a possibilidade de que a partir de um certo instante  $u^*(t)$  tenha o comportamento descrito em (14) é excluída. Assim, o controle ótimo, se não for nulo sempre, ele deve ser tal que acabe com  $u^*(t) = 1$ .

Analisaremos agora uma outra situação:

**Lema 2** *Se o controle ótimo terminar com  $u^*(t) = 1$  e  $\alpha \approx 0$ , então ele terá no máximo uma troca de controle.*

*Dem:*

Suponha que o controle seja da forma

$$u^*(t) = \begin{cases} 1; & 0 \leq t < \bar{t}_1 \\ 0; & \bar{t}_1 < t < \bar{t}_2 \\ 1; & \bar{t}_2 < t \leq t_f \end{cases}$$

e conseqüentemente teremos

$$g(t) \begin{cases} < 0; & 0 \leq t < \bar{t}_1 \\ > 0; & \bar{t}_1 < t < \bar{t}_2 \\ < 0; & \bar{t}_2 < t \leq t_f \end{cases}$$

Considerando novamente  $\alpha \approx 0$ , vamos analisar o comportamento de  $g(t)$  em cada subintervalo:

- Para  $0 \leq t < \bar{t}_1$  temos  $g(t) < 0$  e portanto  $g(t)$  deve ser crescente para que exista troca de controle em  $t = \bar{t}_1$ . Assim  $g'(t) > 0 \Rightarrow \lambda_2^*(t) < 0$
- Em  $\bar{t}_1 < t < \bar{t}_2$  as equações diferenciais para  $\lambda_1^*$  e  $\lambda_2^*$  são:

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1^* + r(1 - 2N^*)\lambda_1^* = rR\lambda_2^* \\ \dot{\lambda}_2^* + r(1 - N^*)\lambda_2^* = 0, \end{cases}$$

cuja solução para  $\lambda_2^*$  é

$$\lambda_2^*(t) = \lambda_2^*(\bar{t}_1) \exp \int_{\bar{t}_1}^t -r(1 - N^*) ds. \quad (16)$$

Como  $g(t) > 0$  para  $\bar{t}_1 < t < \bar{t}_2$  e  $g(t) < 0$  em  $\bar{t}_2 < t \leq t_f$ ,  $g(t)$  deve continuar crescendo para  $t > \bar{t}_1$ , atingir um máximo em  $t = \tilde{t}$  dentro desse intervalo para que posteriormente  $g(\bar{t}_2) = 0$ .

Dessa forma  $\lambda_2^*(t) < 0$  em  $\bar{t}_1 < t < \tilde{t}$ ,  $\lambda_2^*(\tilde{t}) = 0$  e  $\lambda_2^*(t) > 0$ , para  $(\tilde{t}, t_f]$ .

Voltando em (16) concluímos que  $\lambda_2^*(t) < 0$  em todo o intervalo  $(\bar{t}_1, \bar{t}_2)$ , o que nos leva a uma contradição. ♦

Com a exclusão de alguns possíveis controles, através dos dois lemas anteriores podemos enunciar um resultado geral:

**Teorema 1** *Para o problema de controle (7)-(8), com  $\alpha \approx 0$ , o controle ótimo  $u^*(t)$  é do tipo*

$$u^*(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \bar{t} \\ 1, & \bar{t} < t \leq t_f, \end{cases}$$

com  $\bar{t} \in [0, t_f]$ .

*Dem:* Ver lemas 1 e 2. ♦

Do teorema anterior conseguimos identificar quais os possíveis tipos de controle que, naturalmente, dependem dos parâmetros envolvidos no modelo:  $S_0$ ,  $R_0$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $c_1$  e  $r$ . No entanto, para este modelo estudado não obtivemos uma relação explícita entre os parâmetros de maneira a identificar, por exemplo, quando  $u^*(t) = 0$ ,  $\forall t \in [0, t_f]$ .

## 2.1 Aplicação: controle de fungos do feijoeiro

No trabalho de Bassanezi et al.[3] alguns parâmetros monocíclicos do fungo causador da ferrugem (*Uromyces appendiculatus*) e da mancha angular (*Phaeoisariopsis griseola*) no feijoeiro foram quantificados a diferentes temperaturas em dois cultivares: Rosinha G-2 e Carioca. Na descrição do procedimento realizado para a análise dos dados, encontramos [3]:

*”Sementes das duas cultivares foram semeadas em vasos de alumínio com dois litros de mistura de solo argiloso, areia e esterco bovino curtido (2:1:2), deixando-se duas plantas por vaso... As inoculações foram realizadas 3 semanas após a semeadura das plantas, quando estas apresentavam duas folhas trifolioladas... As plantas inoculadas foram imediatamente transferidas para câmaras de crescimento com temperatura e luminosidade controladas, onde foram mantidas em câmara úmida, no*



escuro, nas temperaturas de 9, 12, 15, 18, 21, 24 e 27°C, para ferrugem e 15, 18, 21, 24, 27 e 30°C para mancha angular..

O delineamento experimental foi inteiramente casualizado com 4 repetições, cada repetição sendo constituída de um vaso com duas plantas. As avaliações, realizadas na segunda folha trifoliolada, foram feitas diariamente a partir do aparecimento dos primeiros sintomas e continuaram até que o número de lesões/folha estabilizasse. Foram estimados a área foliar, o número de lesões por folha e o tamanho médio das lesões. A estimativa da área foliar foi feita por meio das equações  $y = 2,445x^{1,94}$  para a cultivar Rosinha G-2 e  $y = 3,033x^{1,87}$  para a cultivar Carioca, onde  $x$  é a maior largura do folíolo central e  $y$ , a área da folha trifoliolada. Com os valores da área foliar ( $\text{cm}^2$ ) e do número de lesões/folha foi calculado o número de lesões/ $\text{cm}^2$  de folha, em cada avaliação.”

Podemos observar que nestes experimentos realizados, o desenvolvimento de cada tipo de fungo é analisado através de área lesionada e não com o número de propágulos. Outros parâmetros foram observados, como por exemplo, a severidade da doença (% de área foliar com lesões) e a **taxa de crescimento das lesões**.

Os resultados obtidos para este último parâmetro podem ser visualizados na Figura 1, observando-se que a temperatura ótima para o desenvolvimento da ferrugem é de 17°C e para a mancha angular, 24°C.

Utilizamos os dados da Figura 1 nas simulações realizadas e procuramos observar a variação do controle quando alteramos cada um dos parâmetros, já que uma relação explícita entre  $\bar{t}$  e os demais parâmetros presentes no modelo não foi obtida.

Nas simulações realizadas os parâmetros utilizados foram utilizados com as seguintes unidades:  $\alpha$  (adimensional),  $t$ ,  $t_f$  e  $\bar{t}$  (dias),  $r$  e  $\beta$  ( $\text{dias}^{-1}$ ),  $c_1$  (área lesionada/dias). Por questões de simplificação, as unidades serão omitidas na descrição das simulações assim como na maioria dos gráficos.

Vamos considerar que na cultura analisada, a fração total de área infectada é de 10% ( $N(0) = 0,1$ ), onde  $S(0) = 0,08$  e  $R(0) = 0,02$  ( $t = 0$  é o instante em que a doença é observada) e que a doença foi detectada restando 80 dias para a colheita, ou seja,  $t_f = 80$  dias. Vejamos algumas situações analisadas:

#### a) Influência de $r$ na determinação de $\bar{t}$ (instante de comutação do tratamento):

Consideramos fixos os parâmetros  $\beta$ ,  $c_1$ ,  $\alpha$ , as condições iniciais  $S_0$ ,  $R_0$  e realizamos algumas simulações utilizando alguns valores de  $r$  obtidos em [3] para a mancha angular na cultivar Rosinha G-2 e o software desenvolvido por Adami [1]. Dentre os valores de  $r$ , escolhemos:  $r_1 = 0,026$  A/dia onde  $A = 10\text{mm}^2$ ,  $r_2 = 0,031$  A/dia e  $r_3 = 0,0336$  A/dia. Embora neste experimento realizado a taxa de crescimento máxima obtida seja  $r_3$ , consideraremos diversos valores de  $r$  (maiores que  $r_3$  e também menores que  $r_1$ ) com o propósito de observarmos a variação de  $\bar{t}$  em função de  $r$ .

Nos quadros que serão apresentados a seguir podemos observar a variação de  $\bar{t}$  em função de  $r$  assim como a área total lesionada ( $S^*(t_f)$ ,  $R^*(t_f)$ ,  $N^*(t_f)$ ) após o respectivo

Figura 1: (a) taxa de crescimento do fungo causador da ferrugem e da mancha angular, respectivamente, na cultivar Rosinha G-2, em função da temperatura. (b) análogo ao item anterior para a cultivar Carioca [3].

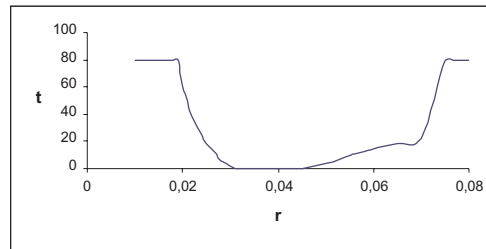
controle efetuado, sendo que, do teorema 1, se existe troca de controle ela ocorre de  $u = 0$  para  $u = 1$ . Para  $\bar{t} = 80$  temos  $u^*(t) = 0, \forall t \in [0; 80]$  e para  $\bar{t} = 0$  temos  $u^*(t) = 1$ .

No quadro 1 tomamos  $S_0 = 0,08$ ,  $R_0 = 0,02$ ,  $c_1 = 0,002$ ,  $\beta = 0,6$  e  $\alpha = 10^{-5}$ . Podemos observar que, com a eficiência ( $\beta$ ) e "custo" ( $c_1$ ) fixados, à medida que  $r$  aumenta passa a existir troca de controle de modo que o período de aplicação aumenta ( $\bar{t}$  diminui) até que, para  $r \in [0,031; 0,045]$  torna-se necessário a aplicação durante todo o intervalo  $[0; 80]$ . Para valores de  $r$  maiores que  $0,045$  o valor de  $\bar{t}$  aumenta e a aplicação de fungicida torna-se inviável para valores de  $r$  muito altos (veja figura 2). Na figura 3 observamos o comportamento da área lesionada no tempo final  $t_f$  para cada tipo de controle obtido (em função de  $r$ ).

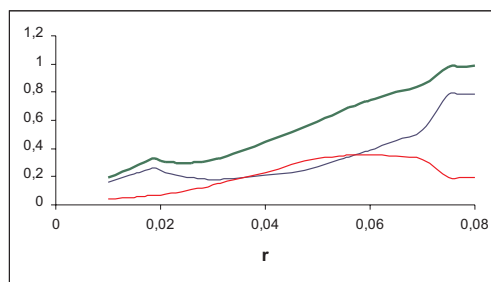
Mantendo os mesmos parâmetros do quadro 1, exceto  $c_1$  e  $\beta$ , que foram considerados como  $c_1 = 0,004$  e  $\beta = 0,8$ , obtemos no quadro 2 a seguir a variação de  $\bar{t}$  em função de  $r$  assim como os respectivos valores para  $S^*(t_f)$ ,  $R^*(t_f)$  e  $N^*(t_f)$ .

0,01	80	0,1586	0,0396	0,1982
0,015	80	0,2155	0,05389	0,26939
0,016	80	0,2284	0,0571	0,2855
0,017	80	0,2416	0,0604	0,302
0,018	80	0,2553	0,0638	0,3191
0,019	79,19	0,261	0,0674	0,3284
0,02	61,5	0,2437	0,07152	0,31522
0,021	49,24	0,23	0,0762	0,3062
0,022	38,9	0,2191	0,0815	0,3006
0,023	30,75	0,2099	0,0872	0,2971
0,024	24,72	0,2022	0,0935	0,2957
0,025	18,49	0,1961	0,1	0,2961
0,026	14,27	0,1906	0,1072	0,2978
0,027	10,25	0,1865	0,1147	0,3012
0,028	6,23	0,1833	0,1225	0,3058
0,029	4,22	0,1804	0,1309	0,3113
0,03	2,21	0,1784	0,1396	0,318
0,031	0	0,1783	0,1483	0,3266
0,032	0	0,1821	0,1564	0,3385
0,036	0	0,1976	0,1918	0,3894
0,04	0	0,2129	0,2312	0,4441
0,045	0	0,2314	0,2846	0,516
0,05	4,22	0,2664	0,3285	0,5949
0,055	9,24	0,3271	0,3478	0,6749
0,056	10,25	0,3374	0,3516	0,689
0,057	11,25	0,3518	0,3521	0,7039
0,058	12,26	0,3637	0,3539	0,7176
0,059	13,26	0,378	0,3534	0,7314
0,06	14,17	0,3899	0,3542	0,7441
0,065	18,49	0,4602	0,3433	0,8035
0,07	22,71	0,5293	0,3227	0,852
0,075	80	0,7825	0,1956	0,9781
0,077	80	0,785	0,1962	0,9812
0,08	80	0,7881	0,197	0,9851

**Quadro 1** - Valores de  $\bar{t}$  e  $(S^*(t_f), R^*(t_f), N^*(t_f))$  para cada taxa de crescimento  $r$  dada, considerando os parâmetros e as condições iniciais fixos:  $S_0 = 0,08$ ,  $R_0 = 0,02$ ,  $c_1 = 0,002$  e  $\beta = 0,6$ .



**Figura 2:** Instante de comutação  $\bar{t}$  do controle em função da taxa de crescimento  $r$  do fungo (dados fixados no quadro 1).



**Figura 3:** -  $S^*(t_f)$ ,  $R^*(t_f)$  e  $N^*(t_f)$  em função de  $r$  para os dados do quadro 1.  $N^*(t_f)$  é a porcentagem de área lesionada no tempo final  $t_f$  para cada valor de  $r$  fixo.

r	t	S*(t <sub>f</sub> )	R*(t <sub>f</sub> )	N*(t <sub>f</sub> )
0,01	80	0,1586	0,039	0,1976
0,015	80	0,2155	0,0539	0,2694
0,016	80	0,2284	0,0571	0,2855
0,017	80	0,2417	0,0604	0,3021
0,018	80	0,2553	0,0638	0,3191
0,019	80	0,2695	0,0673	0,3368
0,02	80	0,2839	0,0709	0,3584
0,021	80	0,2987	0,0747	0,3734
0,022	80	0,3139	0,0784	0,3923
0,023	80	0,3293	0,0823	0,4116
0,024	80	0,3449	0,0862	0,4311
0,025	80	0,3606	0,0901	0,4507
0,026	71,75	0,3408	0,0945	0,4353
0,027	63,71	0,3211	0,0997	0,4208
0,028	57,28	0,3065	0,1054	0,4119
0,029	51,25	0,2958	0,1115	0,4073
0,03	47,23	0,2867	0,1181	0,4048
0,031	43,21	0,2804	0,1249	0,4053
0,032	41,2	0,2745	0,1322	0,4067
0,036	32,76	0,2658	0,1632	0,429
0,04	28,74	0,2725	0,1956	0,4681
0,045	27,73	0,2969	0,2336	0,5305
0,046	27,73	0,3034	0,2405	0,5439
0,047	27,73	0,31	0,2473	0,5573
0,048	27,73	0,3165	0,254	0,5705
0,049	27,73	0,3231	0,2606	0,5837
0,05	28,74	0,3318	0,2659	0,5977
0,055	29,74	0,3819	0,2849	0,6668
0,056	30,75	0,3902	0,2888	0,679
0,057	30,75	0,4034	0,2895	0,6929
0,058	30,75	0,4174	0,2894	0,7068
0,059	31,75	0,4305	0,2893	0,7198
0,06	31,75	0,4378	0,2925	0,7303
0,061	32,76	0,4463	0,2946	0,7409
0,062	80	0,7524	0,1881	0,9405
0,065	80	0,7621	0,1905	0,9526
0,07	80	0,7742	0,1935	0,9677

**Quadro 2** - Valores de  $\bar{t}$  e  $(S^*(t_f), R^*(t_f), N^*(t_f))$  para cada taxa de crescimento  $r$  dada, considerando os parâmetros e condições iniciais fixos:  $S_0 = 0,08$ ,  $R_0 = 0,02$ ,  $c_1 = 0,004$  e  $\beta = 0,8$ .

Para o quadro 2 não temos o mesmo tipo de comportamento já observado no quadro 1. Para este novo conjunto de dados não observamos um intervalo de  $r$  para o qual  $u^*(t) = 1$  (como no quadro 1) mas sim um intervalo de  $r$  onde a troca de controle praticamente não sofre alteração (Figura 4). Na Figura 5 observamos também este conjunto de dados os valores de  $S^*(t_f)$ ,  $R^*(t_f)$  e  $N^*(t_f)$  para cada  $r$  dado.

Se tomarmos os mesmos parâmetros para o quadro 1, porém com  $c_1 = 0,02$  (10 vezes maior que o utilizado) encontramos que  $u^*(t) = 0$  sempre, para qualquer valor de  $r$  do quadro.

#### b) Influência de $\beta$ e $c_1$ na determinação de $\bar{t}$ :

Mantendo fixos  $\alpha = 10^{-5}$ ,  $S_0 = 0,08$ ,  $R_0 = 0,02$ ,  $r = 0,026$ ,  $t_f = 80$  e variando os parâmetros  $\beta$  e  $c_1$ , observamos no quadro a seguir o valor de  $\bar{t}$  obtido. Para este conjunto de dados tem-se que, fixando  $\beta$ , existe um intervalo  $[a, b]$  de  $c_1$  para o qual existe troca de controle e, à medida que  $c_1$  aumenta ( $c_1 > b$ ) torna-se inviável a aplicação de fungicida; se  $c_1 < a$  então  $u^*(t) = 1$  ( $\bar{t} = 0$ ),  $\forall t \in [0; 80]$ .

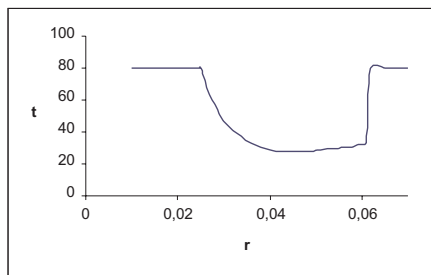


Figura 4: Instante de comutação  $\bar{t}$  do controle em função da taxa de crescimento  $r$  do fungo (dados fixados no quadro 2).

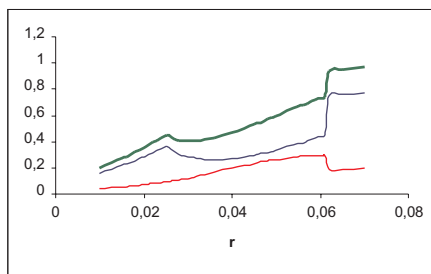


Figura 5:  $S^*(t_f)$ ,  $R^*(t_f)$  e  $N^*(t_f)$  em função de  $r$  para os dados do quadro 2.  $N^*(t_f)$  é a porcentagem de área lesionada no tempo final  $t_f$  para cada valor de  $r$  fixo.

$\beta \setminus c_1$	0,0015	0,00175	0,002	0,00225	0,0025	0,003	0,0035	0,004	0,0045
0,8	0	3,21	10,25	18,49	24,72	38,99	53,26	71,75	80
0,75	0	2,21	10,25	18,49	26,73	42,2	59,49	80	80
0,7	0	2,21	10,25	20,5	28,94	47,43	68,73	80	80
0,65	0	2,21	12,26	22,71	32,76	55,27	80	80	80
0,6	0	2,21	14,27	26,73	38,99	68,73	80	80	80

**Quadro 3** - Valor de  $\bar{t}$  para cada par  $(\beta, c_1)$  - Por exemplo, para  $c_1 = 0,003$  e  $\beta = 0,7$  tem-se que  $\bar{t} = 47,43$ .

Explorando um pouco mais os dados do quadro 3, podemos visualizar nas figuras que se seguem,  $\bar{t}$  em função de  $\beta$  (para cada  $c_1$  do quadro 3) assim como  $\bar{t}$  em função de  $c_1$ .

Do quadro 3 e das diversas simulações realizadas observa-se que, a relação patógeno-fungicida-ambiente e, conseqüentemente, a forte dependência dos parâmetros, é que determina a existência ou não de  $\bar{t}$ .

Embora não tenhamos uma relação explícita entre os parâmetros para a obtenção de  $u^*(t)$ , as simulações numéricas utilizando o pacote desenvolvido em [1] possibilitou-nos alguma análise e obtenção de  $u^*(t)$ .

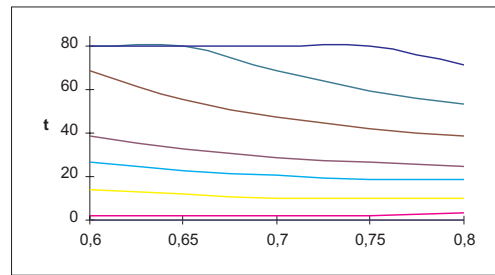


Figura 6:  $\bar{t}$  em função de  $\beta$  para cada valor de  $c_1$  do quadro 3.

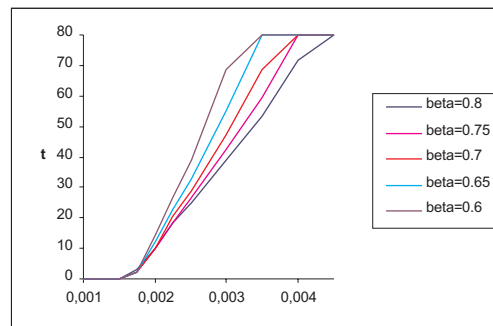


Figura 7:  $\bar{t}$  em função de  $c_1$  para cada valor de  $\beta$  do quadro 3.

### 3 Taxa de Crescimento Dependente do Tempo

Os primeiros modelos que surgiram no estudo da dinâmica de fungos, na ausência de fungicidas, têm como premissa comum o crescimento exponencial de sensíveis e resistentes [2]. Além disso, como ocorre com uma grande parte dos modelos matemáticos usados em Ecologia, os parâmetros envolvidos nos modelos são considerados constantes.

Posteriormente, em vários modelos de dinâmica populacional podemos encontrar algumas considerações a respeito da inclusão de parâmetros dependentes do tempo, ou seja, parâmetros que sofrem variações com as oscilações ambientais. Segundo Campbell [6], o parâmetro  $r$  (taxa de crescimento), que expressa o efeito do ambiente, a susceptibilidade e agressividade do patógeno no progresso da doença, é considerado "ingenualmente" constante. No entanto, o ambiente instável de um sistema natural leva o processo de doença a oscilar amplamente dentro de períodos relativamente curtos de tempo [10] e, conseqüentemente, estas oscilações no ambiente indicam que  $r$  deve ser um parâmetro variável.

No caso específico de fungos, vários fatores exercem grande influência no seu desenvolvimento como umidade, luminosidade, temperatura, dentre outros. No que se refere à temperatura, sabe-se que abaixo de  $0^\circ C$  células fúngicas podem sobreviver mas raramente crescem, e acima de  $40^\circ C$  a maior parte das células pára de crescer e logo morre.

Entre estas temperaturas, atividades fúngicas aumentam ou declinam de acordo com a temperatura.

O crescimento de fungos é o resultado de interações de inúmeros processos controlados por enzimas. A atividade fúngica começa a uma temperatura mínima, aumenta até um valor ótimo e então declina e pára a uma temperatura máxima. Estas temperaturas são conhecidas como **temperaturas cardinais** e dependem de outros fatores, que inclui o tempo de exposição à qualquer temperatura [11]. Além disso, para cada tipo de fungo e sob diferentes condições, estas temperaturas cardinais podem variar sensivelmente. Por exemplo, *Merulius sylvester* cresce lentamente a  $10^{\circ}\text{C}$  e  $35^{\circ}\text{C}$  e mais rapidamente a  $23^{\circ}\text{C}$ , e o declínio no crescimento de cada lado da temperatura ótima é aproximadamente igual. No entanto, *Merulius lacrymans* cresce lentamente a  $8^{\circ}\text{C}$  e tem um ótimo a  $23^{\circ}\text{C}$ , mas seu crescimento declina rapidamente acima de  $27^{\circ}\text{C}$  [7]. Assim, para cada tipo de fungo existe um intervalo de temperatura em que seu crescimento é máximo.

Diante dessas considerações a respeito da dependência da taxa de crescimento em relação temperatura (e conseqüentemente do tempo), efetuaremos algumas simulações a título de comparação com o caso constante, tomando  $r(t)$  como uma função periódica.

Utilizaremos alguns dos dados presentes na Figura 1 para a taxa de crescimento da lesão da mancha angular no cultivar Rosinha G-2. Por exemplo, a temperatura ótima para o desenvolvimento desse fungo ( $24^{\circ}\text{C}$ ) e os valores de  $r$  nas temperaturas  $24^{\circ}\text{C}$  ( $r = 0,014\text{mm}^2/\text{h}$ ) e  $29^{\circ}\text{C}$  ( $r = 0,002\text{mm}^2/\text{h}$ ). Esses valores de  $r$  serão utilizados com as mesmas unidades já usadas nas simulações anteriores.

Se considerarmos que a temperatura máxima atingida durante o ano é  $39^{\circ}\text{C}$  e que a mínima é  $1^{\circ}\text{C}$ , podemos simular a temperatura em função de  $t$  (dias do ano, de janeiro a dezembro) da seguinte forma:

$$T(t) = 20 + 19 \cos(\pi t/180), \quad (17)$$

onde  $20^{\circ}\text{C}$  corresponde a uma temperatura média anual e o gráfico de  $T(t)$  pode ser observado a seguir:

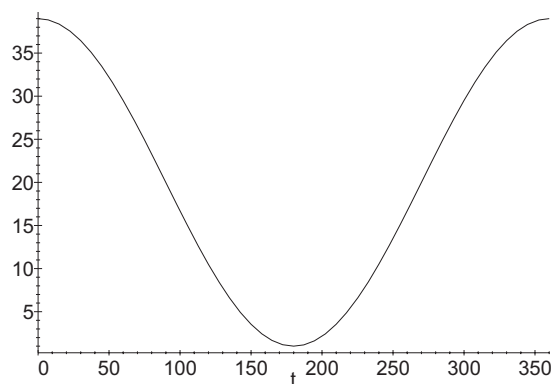


Figura 8: Gráfico de  $T(t) = 20 + 19 \cos(\pi t/180)$ .

Utilizando a idéia de temperaturas cardinais citadas anteriormente, ou seja, a atividade dos fungos começa a uma temperatura mínima, aumenta até um ótimo e então declina, vamos supor a taxa de crescimento em função da temperatura da forma:

$$r(T) = a \exp[-b(T - T^*)],$$

onde  $T^*$  é a temperatura em que a maior taxa de crescimento é atingida e os coeficientes  $a$  e  $b$  podem ser determinados a partir de informações de  $r$  em algumas temperaturas.

Como esse fungo praticamente não se desenvolve em temperaturas inferiores a  $17^\circ C$  e superiores a  $30^\circ C$ , para efeito de simplificação e obtenção de  $r(t)$  de modo contínuo, vamos considerar

$$T = 24^\circ C \Rightarrow r = 0,0336$$

$$T = 6^\circ C \Rightarrow r = 0,0048$$

Assim, obtemos a função  $r(t) = r(T(t))$ , dada por

$$r(t) = 0,0336 \text{Exp}[-0,006 * (-4 + 19 * \text{Cos}(\pi t/180))^2],$$

cujo gráfico pode ser visualizado a seguir:

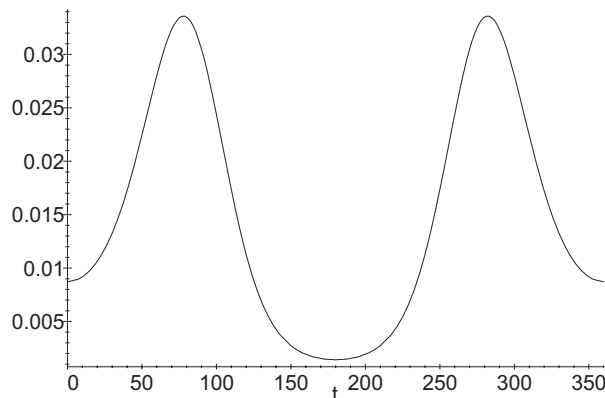


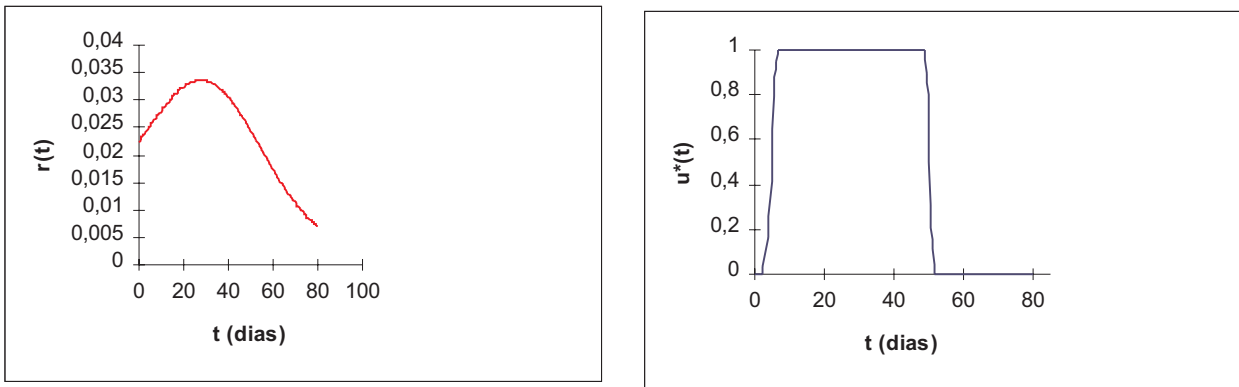
Figura 9: Gráfico de  $r(t) = 0,0336 \text{Exp}[-0,006 * (-4 + 19 * \text{Cos}(\pi t/180))^2]$ .

Utilizando  $S_0 = 0,08$ ,  $R_0 = 0,02$ ,  $\alpha = 10^{-5}$ ,  $\beta = 0,6$ ,  $c_1 = 0,002$  e a função  $r(t)$  acima, observamos que o controle obtido não necessariamente apresenta o mesmo tipo de comportamento do caso  $r$  constante.

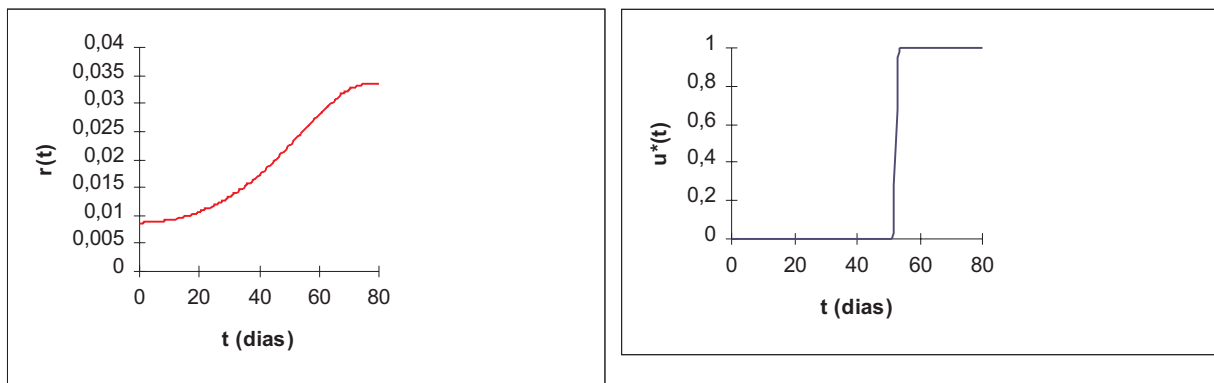
Para  $r(t) \in [50; 130]$  obtém-se uma troca de controle em  $\bar{t}_1 = 4,22$  e  $\bar{t}_2 = 50,24$  enquanto que, considerando  $r(t) \in [0; 80]$  obtemos  $\bar{t} = 52,25$ . Nas figuras que se seguem podemos observar estes resultados e comparar  $r(t)$  com o intervalo de tempo em que  $u^*(t) = 1$ , ou seja,  $u^*(t) = 1$  para uma "faixa" em que  $r(t)$  é máxima.

Vale a pena ressaltar que a passagem de  $u = 0$  para  $u = 1$ , utilizando métodos numéricos, não ocorre de forma instantânea, o que pode ser observado nos gráficos para  $u^*(t)$ .





(a)



(b)

**Figura 10** - Intervalo da função  $r(t)$  considerado e o respectivo controle obtido - (a)  $r(t) \in [50; 130]$ , (b)  $r(t) \in [0; 80]$ .

Assim, a inclusão do efeito da temperatura na taxa de crescimento das lesões resulta em um comportamento diferente em modelo linear [13] e em modelo não linear. No primeiro, vemos que se existe troca de controle, ela é única, enquanto que no segundo, a troca de controle pode ocorrer em dois instantes de tempo distintos.

Embora esse fato só tenha sido observado numericamente, sem uma demonstração formal, constatamos que a não linearidade do modelo, com a inclusão das competições inter e intra específicas, tem uma grande influência na determinação de uma estratégia ótima de controle, principalmente quando consideramos  $r = r(t)$  variável.

## 4 Considerações Finais

A máxima produtividade com o menor custo é o alvo principal que se pretende atingir em qualquer circunstância econômica. No caso específico deste trabalho buscamos mo-

delar matematicamente uma situação de produção agrícola sujeita ao ataque de fungos, onde se buscava otimizar a produção (minimizando a infestação no final da colheita) com um custo menor possível no combate à doença (otimizando o uso de agrotóxico) considerando "populações de fungos" sensíveis e resistentes aos fungicidas.

Consideramos a dinâmica da área foliar lesionada contemplando a competição intra-específica entre as populações de fungos sensíveis e resistentes pela ocupação da área foliar. Tal ocupação é cumulativa, isto é, uma vez lesionada a área foliar não se recupera para a fotossíntese, o que acarreta uma menor produtividade da planta. A produtividade é afetada significativamente se a região lesada ultrapassa algum índice de infestação que varia para cada cultivar. O problema de controle que procuramos analisar visou estabelecer um valor mínimo para a região foliar lesionada no tempo final (colheita) sujeita ao gasto (aplicação) mínimo de fungicidas.

Também neste tipo de modelo consideramos  $r$  constante e  $r = r(t)$  variável com o tempo sendo que no primeiro caso a troca de controle (quando existe) é de  $u = 0$  para  $u = u_{\max}$ , e para  $r(t)$  variável, existe a possibilidade de duas trocas de controle (embora só observado em simulações) sendo que  $u = u_{\max}$  é obtido sempre no intervalo onde a taxa de crescimento é máxima. Comportamento semelhante não foi observado para o modelo linear em [13], que possui no máximo uma troca de controle, tanto para  $r = \text{constante}$  como para  $r = r(t)$ .

É importante ressaltarmos que, tanto no modelo linear tratado em [13] como no modelo não linear aqui proposto, obtivemos algumas particularidades de cada modelo apresentado considerando  $\alpha \approx 0$ . Assim, a mutação de sensível para resistente tem pouca influência na adoção de uma medida de controle quando desejamos identificar como o fungicida deve ser aplicado, logo após a doença ter sido detectada. A pressão de seleção se mostra muito mais importante para o desenvolvimento da resistência do que as mutações, uma vez que a resistência está sempre presente na população. Neste caso, não estamos levando em consideração aplicações anteriores, mas o nível atingido pela "população" resistente, logo após o controle, pode ser analisado para futuras aplicações.

Ao considerarmos  $r(t)$  variável optamos por incorporar somente o efeito da temperatura, pois é a variável que mais frequentemente está relacionada com respostas biológicas e quase universalmente citada nos estudos epidemiológicos, além de afetar todos os componentes do patossistema das plantas, como o crescimento do hospedeiro e o desenvolvimento das doenças [5].

No entanto, nos trabalhos de Dalla Pria [5] e Berger et al. [4] o molhamento também foi incorporado para o estudo da severidade da doença (mancha angular) nas cultivares Rosinha e Carioca. Esta variável é uma das modificações que podem ser realizadas no modelo de modo a incorporar mais alguns fatores que têm grande influência no crescimento de fungos.

Outro fato a ser considerado é o crescimento da planta (área foliar) que foi suposto constante. No entanto, é preciso ter cuidado ao incorporar cada vez mais variáveis no modelo pois resultados analíticos tornam-se cada vez mais difíceis (podemos observar isto na passagem do modelo 1 para o 2) e métodos numéricos tornam-se de fundamental

importância.

Finalmente, uma outra modificação a ser analisada nos dois problemas de controle ótimo propostos seria fixar as "populações" S e R no tempo final  $t_f$  ou impor restrições do tipo  $S^*(t_f) \leq \bar{S}$  e  $R^*(t_f) \leq \bar{R}$ .

## Referências

- [1] Adami, A. *Resolução de problemas de controle ótimo utilizando o algoritmo BOX*, Tese de Mestrado, IMECC- UNICAMP, 1996.
- [2] Barrett, J. A. *Estimating Relative Fitness in Plant Parasites: Some General Problems*, *Phytopathology*, 73 (4), 1983.
- [3] Bassanezi, R. B., Amorin, L., Bergamin Filho, A. e Godoy, C. V. *Análise Comparativa entre a ferrugem e a mancha angular do feijoeiro: efeito da temperatura nos parâmetros monocíclicos*, *Fitopatologia brasileira*, 22 (3), 1997.
- [4] Berger, R. D., Hau, B., Weber, G. E., Bacchi, L. M. A., Bergamin Filho, A. e Amorim, L. *A Simulation Model to Describe Epidemics of Rust of Phaseolus Beans - Development of the Model and Sensitivity Analysis*, *Ecology e Epidemiology*, 85 (6), 1995.
- [5] Dalla Pria, M. *Quantificação de parâmetros monocíclicos da antracnose (*Colletotrichum Lindeunthianum*) e da mancha angular (*Phaedisariopsis Griseola*) do feijoeiro*, Tese de Doutorado, ESALQ/USP, 1997.
- [6] Campbell, C. L. e Madden, L. V. *Introduction to Plant Disease Epidemiology*, John Wiley & Sons, 1990.
- [7] Deverall, B. J. *The Physical Environment for Fungal Growth in The fungi - Advanced Treatise*, editado por G. C. Ainsworth e Alfred S. Sussman, vol. 1, Academic Press, 1965.
- [8] Ghini, R., Vendite, L. L. e Petrucci, A. A. *Dosagens de fungicidas: avaliação de seus efeitos na resistência de fungos através de um modelo matemático*, *Fitopat. Bras.* 19, pp. 514-519, 1994.
- [9] Kirk, D. *Optimal Control Theory - An Introduction*, Prentice Hall, 1970.
- [10] Kranz, J. e Royle, D. J. *Perspectives in Mathematical Modeling of Plant Disease Epidemics - Plant Disease Epidemiology*, 1978.
- [11] Lacaz, C. S., Minami, P. S. e Purchio, A. *O grande mundo dos Fungos*, Editora Polígono, Universidade de São Paulo, 1970.

- [12] Varassin, C. G. *Modelagem Matemática para o crescimento de populações de fungos e o desenvolvimento da resistência a fungicidas*, Tese de Mestrado, IMECC-UNICAMP, 1996.
- [13] Zotin, R. *Controle Ótimo da Aplicação de Fungicidas na Lavoura*, Tese de Doutorado, UNICAMP, 1999.