

Epidemiologia e Teoria Fuzzy

Laécio C. Barros

UNICAMP - IMECC
Depto. de Matemática Aplicada
laeciocb@ime.unicamp.br

Maria Beatriz F. Leite

UNICAMP - IMECC
Depto. de Matemática Aplicada
bialeite@ime.unicamp.br

Rodney C. Bassanezi

UNICAMP - IMECC
Depto. de Matemática
rodney@ime.unicamp.br

Resumo

Este é ainda um trabalho inicial, no qual foram utilizadas algumas técnicas da teoria fuzzy em um modelo de epidemiologia do tipo SI . O coeficiente de transmissão foi considerado como um conjunto fuzzy, devido à sua subjetividade intrínseca e, o valor de reprodutibilidade basal foi discutido para o modelo.

Palavras-chave: epidemiologia - teoria fuzzy - coeficiente de transmissão - valor de reprodutibilidade basal.

1 Introdução

Na última década, a literatura matemática, que trata de fenômenos imprecisos, tem crescido consideravelmente [3], principalmente no tocante da teoria de controle automático (controladores fuzzy).

A necessidade de se estudar o comportamento dinâmico de epidemias é de fundamental importância no que diz respeito à sua evolução, estabilidade e controle. Porém, como boa parte dos fenômenos naturais, os fenômenos biológicos possuem uma carga grande de subjetividade que não é incorporada nos modelos matemáticos tradicionais determinísticos que os descrevem.

Nosso principal interesse, nesta área, está relacionado com o estudo de fenômenos biológicos que exibem graus de incertezas e que possam ser modelados pela *Teoria Fuzzy*, formalizada por Zadeh [6]. Tal ferramenta pode acrescentar “novas” informações, facilitando a análise e compreensão de algumas situações reais, como a propagação e controle de epidemias [4][5], onde tem-se apenas informações parciais ou imprecisas.

Dessa forma, nosso objetivo é estudar modelos epidemiológicos incluindo aspectos de incertezas que estão presentes nos fenômenos biológicos.

2 Preliminares

Um subconjunto fuzzy F do conjunto universo \mathcal{U} é definido em termos de uma função grau de pertinência u que a cada elemento x de \mathcal{U} associa um número $u(x)$, entre zero e um chamado de grau de pertinência de x a F . Assim, o conjunto fuzzy F é simbolicamente indicado por uma função grau de pertinência

$$u : \mathcal{U} \rightarrow [0, 1].$$

Os valores $u(x) = 1$ e $u(x) = 0$ indicam, respectivamente, a pertinência completa e a não pertinência do elemento x a F .

É interessante notar que um subconjunto clássico A de \mathcal{U} é um particular conjunto fuzzy para o qual a função grau de pertinência é a função característica $\mathcal{X}_A : \mathcal{U} \rightarrow \{0, 1\}$.

3 O Modelo

O modelo clássico mais simples para descrever a dinâmica de doenças transmitidas diretamente onde há interação entre indivíduos suscetíveis e infectados é o modelo do tipo SI . As equações diferenciais clássicas normalizadas que descrevem essa dinâmica são dadas por:

$$\begin{cases} \dot{S} &= -\beta SI \\ \dot{I} &= \beta SI \\ \text{com} & S + I = 1 \end{cases} \quad (1)$$

onde S é a proporção de indivíduos suscetíveis, I é a proporção de indivíduos infectados e β é o coeficiente de transmissão.

Os conceitos de suscetível bem como de infeccioso são incertos no sentido que há diferentes graus, tanto de suscetibilidade como de infecciosidade. O mesmo pode-se dizer a respeito do parâmetro β , que é responsável pelas novas ocorrências da doença.

Visando incorporar essa heterogeneidade populacional, numa primeira abordagem consideramos apenas o parâmetro β (que, de maneira geral, representa a chance de que num contato entre um suscetível e um infectado ocorra a transmissão da doença) como um conjunto fuzzy [1][2].

Como o parâmetro β é, em certo sentido, “responsável” pela chance de ocorrer novos casos, admitimos que ele depende, por exemplo, da carga viral. Assim, quanto maior for a carga viral, maior será a chance de transmissão da doença. Em outras palavras, assumimos que $\beta = \beta(\nu)$, onde ν é a carga viral, é uma função não decrescente. Por outro lado, espera-se que quando a carga viral é pequena não há chance de ocorrer a transmissão. Em outras palavras, admitimos que exista uma carga mínima necessária ν_{min} para que haja chance de transmissão da doença. Além disso, a partir de uma certa carga viral ν_M , a chance é máxima. Admitimos ainda que, a carga viral máxima deve assumir um valor máximo, ν_{max} .

Escolhemos

$$\beta(\nu) = \begin{cases} 0 & \text{se } \nu < \nu_{\min} \\ \frac{\nu - \nu_{\min}}{\nu_M - \nu_{\min}} & \text{se } \nu_{\min} < \nu < \nu_M \\ 1 & \text{se } \nu_M < \nu < \nu_{\max} \\ 0 & \text{se } \nu > \nu_{\max} \end{cases}$$

O parâmetro ν_{\min} representa a quantidade mínima de vírus necessária para que possa ocorrer a transmissão da doença. Este parâmetro poderia ser interpretado como o valor que dá a suscetibilidade do grupo estudado. De fato, quanto maior for o valor de ν_{\min} maior é a quantidade necessária de vírus para que ocorra a transmissão e, isto significa que o grupo possui uma baixa suscetibilidade à doença. Em outras palavras, quanto maior for ν_{\min} , maior é a resistência dos indivíduos suscetíveis. Já o parâmetro ν_{\max} representa a carga viral a partir da qual a **chance** de transmissão é máxima. Obviamente, isto não significa que de fato ocorra um novo caso.

Além disso, consideramos que a carga viral distribui-se na população de acordo com a função distribuição $\rho(\nu)$ dada a seguir:

$$\rho(\nu) = \begin{cases} 0 & \text{se } \nu < \bar{\nu} - \delta \\ \frac{1}{\delta^2}(\nu - \bar{\nu} + \delta) & \text{se } \bar{\nu} - \delta < \nu < \bar{\nu} \\ -\frac{1}{\delta^2}(\nu - \bar{\nu} - \delta) & \text{se } \bar{\nu} < \nu < \bar{\nu} + \delta \\ 0 & \text{se } \nu > \bar{\nu} + \delta \end{cases}$$

Assim, o parâmetro $\bar{\nu}$ é a carga viral média presente (neste caso a carga viral média dos indivíduos infectados), enquanto δ dá a dispersão.

4 Análise e Interpretação do Modelo

4.1 Solução

A solução para o modelo é obtida escrevendo-se

$$\dot{I} = \beta(1 - I)I$$

Assim obtemos

$$I(v, t) = \frac{I_0 e^{\beta(\nu)t}}{S_0 + I_0 e^{\beta(\nu)t}}. \quad (2)$$

Desse modo $I(v, t)$ indica o número de indivíduos infectados no instante t devido à carga viral v . Para cada v fixo, $I(v, t)$ é uma solução do modelo com coeficiente de transmissão $\beta(\nu)$.

Por outro lado, fixando-se t , $I(v, t)$ é uma variável aleatória e também um conjunto fuzzy, já que $I(v, t) \in [0, 1]$. Assim, faz sentido calcularmos o número médio de infectados no instante t .

4.2 Esperança do número de indivíduos infectados

4.2.1 Esperança Clássica

Como o parâmetro β é modelado pelo conjunto fuzzy acima, calculamos a esperança do número de indivíduos infectados, $E(I(v, t))$, dada por

$$E(I(v, t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} I(v, t)\rho(v)dv = \int_{\bar{v}-\delta}^{\bar{v}+\delta} I(v, t)\rho(v)dv, \quad (3)$$

pois para valores de v fora desse intervalo, temos $\rho(v) = 0$.

Como existem várias possibilidades para calcularmos a esperança em função dos parâmetros, escolhemos inicialmente três casos particulares para serem analisados:

Caso (a): $v_{\min} > \bar{v} + \delta$

Nesta situação, para todos os indivíduos infectados o coeficiente de transmissão $\beta(v)$ é nulo. Substituindo $\beta(v) = 0$ e $I(v, t)$ dado por (2) em (3), obtemos:

$$E(I(v, t)) = \int_{\bar{v}-\delta}^{\bar{v}+\delta} I(v, t)\rho(v)dv = I_0,$$

Portanto, como todos os indivíduos infectados apresentam carga viral abaixo de v_{\min} (nenhum indivíduo possui a carga mínima necessária para que ocorra a transmissão), não ocorre a propagação da doença. Poderíamos interpretar essa situação como a de um grupo altamente resistente (v_{\min} é alto), o que faz com que a suscetibilidade seja muito baixa. A quantidade de infectados permanece inalterada I_0 .

Caso (b): $v_M < \bar{v} - \delta$ e $\bar{v} + \delta < v_{\max}$.

Neste caso, o coeficiente de transmissão é máximo para todos os indivíduos infectados, isto é $\beta(v) = 1$. Após efetuar os cálculos, obtemos

$$E(I(v, t)) = \int_{\bar{v}-\delta}^{\bar{v}+\delta} I(v, t)\rho(v)dv = \frac{I_0 e^t}{S_0 + I_0 e^t}.$$

Observe que a expressão acima coincide com a solução clássica do modelo quando consideramos o coeficiente de transmissão constante, isto é $\beta = 1$.

Caso (c): $\bar{v} - \delta > v_{\min}$ e $\bar{v} + \delta < v_M$

Nesta situação o coeficiente de transmissão é variável para todos os indivíduos infectados. Toda a distribuição de ν está onde $\beta = \frac{\nu - \nu_{\min}}{\nu_M - \nu_{\min}}$.

A esperança matemática é dada por:

$$E(I(v, t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} I(v, t) \rho(\nu) d\nu$$

$$E(I(v, t)) = \int_{\bar{\nu} - \delta}^{\bar{\nu} + \delta} I(v, t) \rho(\nu) d\nu = \int_{\bar{\nu} - \delta}^{\bar{\nu}} I(v, t) \rho(\nu) d\nu + \int_{\bar{\nu}}^{\bar{\nu} + \delta} I(v, t) \rho(\nu) \nu d\nu$$

Após substituir as expressões para $I(v, t)$ e $\beta(\nu)$, obtemos

$$E(I(v, t)) = \frac{2}{a\delta} \left\{ \ln\left(1 + \frac{I_0}{S_0} e^{(b+a(\bar{\nu}-\delta))t}\right) - \ln\left(1 + \frac{I_0}{S_0} e^{(b+a\bar{\nu})t}\right) + \frac{1}{a\delta^2} \frac{I_0}{S_0} e^{(b+a\bar{\nu})t} \left(-1 + \cosh(a\delta t)\right) - \frac{1}{4} \frac{I_0}{S_0} e^{(b+a\bar{\nu})t} (-1 + \cosh(2a\delta t)) \right\}$$

onde $a = \frac{1}{\nu_M - \nu_{\min}}$ e $b = \frac{-\nu_{\min}}{\nu_M - \nu_{\min}}$.

A expressão acima foi obtida a partir da integração por partes e considerando a série de Taylor até segunda ordem da função $\ln x$.

4.2.2 Esperança Fuzzy

Se o conjunto fuzzy u é uma variável aleatória então a *esperança fuzzy* de u é definida por

$$FEV[u] = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \min[\alpha, P\{u \geq \alpha\}],$$

onde $P\{u \geq \alpha\}$ é a probabilidade de ocorrer o evento $\{x : u(x) \geq \alpha\}$.

Prova-se [2] que $|E(u) - FEV[u]| \leq 1/4$ e que quando $H(\alpha) = P\{u \geq \alpha\}$ tem ponto fixo $\bar{\alpha}$, então $FEV[u] = \bar{\alpha}$.

No nosso caso, temos $H(\alpha) = P\{I(v, t) \geq \alpha\} = 1 - P\{I(v, t) < \alpha\}$.

A seguir vamos calcular $FEV[I(v, t)]$ para os mesmos casos considerados na esperança clássica.

Caso (a): $\nu_{\min} > \bar{\nu} + \delta$

Para esta situação, obtemos

$$\min[\alpha, H(\alpha)] = \begin{cases} \alpha & \text{se } \alpha \leq I_0 \\ 0 & \text{se } \alpha > I_0 \end{cases}$$

e, portanto

$$FEV[I(v, t)] = I_0.$$

Este resultado é coerente, pois nesta faixa temos $\beta(\nu) = 0$.

Caso (b): $\nu_M < \bar{\nu} - \delta$ e $\bar{\nu} + \delta < \nu_{m\acute{a}x}$.

Para esta situação, obtemos

$$\min[\alpha, H(\alpha)] = \begin{cases} \alpha & \text{se } \alpha \leq \frac{I_0 e^t}{S_0 + I_0 e^t} \\ 0 & \text{se } \alpha > \frac{I_0 e^t}{S_0 + I_0 e^t} \end{cases}$$

e, portanto

$$FEV[I(v, t)] = \frac{I_0 e^t}{S_0 + I_0 e^t}.$$

Novamente neste caso obtemos a solução clássica quando $\beta = 1$.

Caso (c): $\bar{\nu} - \delta > \nu_{m\acute{i}n}$ e $\bar{\nu} + \delta < \nu_M$

Neste caso, obtemos

$$H(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq \alpha < I(\bar{\nu} - \delta, t) \\ 1 - \frac{\left(\frac{A - \bar{\nu}}{\delta} + 1\right)^2}{2} & \text{se } I(\bar{\nu} - \delta, t) \leq \alpha < I(\bar{\nu}, t) \\ \frac{\left(\frac{A - \bar{\nu}}{\delta} + 1\right)^2}{2} & \text{se } I(\bar{\nu}, t) \leq \alpha < I(\bar{\nu} + \delta, t) \\ 0 & \text{se } I(\bar{\nu} + \delta, t) < \alpha \leq 1. \end{cases}$$

onde $A = \nu_{m\acute{i}n} + (\nu_M - \nu_{m\acute{i}n}) \ln\left(\frac{\alpha S_0}{I_0 - I_0 \alpha}\right)^{\frac{1}{t}}$.

De acordo com a expressão de $H(\alpha)$ é possível concluir que $FEV[I(v, t)]$  no máximo $I(\bar{\nu} + \delta, t)$. Dessa forma, a doença não se propaga se tivermos

$$\beta(\bar{\nu} + \delta) \leq 0 \iff \bar{\nu} + \delta - \nu_{m\acute{i}n} \leq 0. \tag{4}$$

5 Valor de Reprodutibilidade Basal

Para os modelos epidemiológicos clássicos, um parâmetro essencial é o *valor de reprodutibilidade basal*, R_0 , que d o número de casos secundários causados por um indivíduo infectado que é introduzido numa populao inteiramente suscetível. Dessa forma, esse parâmetro indica sob quais condioes a doença se propaga na populao. Se um indivíduo infectado consegue provocar mais que um novo caso (isto é $R_0 > 1$) então a doença se propaga. Por outro lado, quando $R_0 < 1$ então a doença se extingue. Para os modelos epidemiológicos mais simples, a expressão para esse parâmetro pode ser

obtida a partir da condição $dI/dt > 0$, que é a condição para que ocorra acréscimo no número de infectados. Dessa forma, para o modelo SI clássico, teríamos

$$\frac{dI}{dt} > 0 \iff \beta SI = \beta(1 - I)I > 0$$

que é satisfeito até que existam indivíduos suscetíveis na população, pois $\beta > 0$.

Já quando utilizamos um conjunto fuzzy para descrever o parâmetro β isto pode não ocorrer. No nosso caso, de acordo com a análise feita acima, é fácil verificar que a condição suficiente para que não ocorra a transmissão da doença é que nenhum indivíduo infectado possua a carga mínima necessária para transmitir a doença. Ou seja, a seguinte condição deve ser satisfeita $\bar{\nu} + \delta < \nu_{\min}$. Esta expressão foi obtida também em (4).

Poderíamos assim, definir o *valor de reprodutibilidade basal fuzzy* para o nosso modelo como

$$R_0^{\text{fuzzy}} = \frac{\bar{\nu} + \delta}{\nu_{\min}}.$$

Como na modelagem clássica, as medidas de controle e prevenção visam reduzir o valor do parâmetro R_0 (de tal forma que $R_0 < 1$) para que a doença não se propague. Neste modelo SI isso não seria possível, visto que a variação dos indivíduos infectados é sempre positiva, como vimos acima.

Já se for considerado β fuzzy, mesmo esse modelo simplista dá informações adicionais à dinâmica da doença. Por exemplo, para que a doença não se propague, devemos reduzir o valor do parâmetro R_0^{fuzzy} . Isto pode ser feito de duas formas: aumentando-se o valor de ν_{\min} . Isto significa que devemos aumentar a resistência dos indivíduos suscetíveis (baixar a suscetibilidade) o que poderia ser feito, por exemplo, através de vacinação, saneamento básico, etc. Nesse sentido, pelo fato do parâmetro ν_{\min} estar relacionado aos indivíduos suscetíveis, essa forma de diminuir R_0 refere-se à medidas de **controle**. Uma outra opção para reduzir R_0 seria diminuir o valor da expressão $\bar{\nu} + \delta$, diminuindo $\bar{\nu}$ ou δ . A diminuição de δ poderia se dar através de medidas de controle na população infectada, como por exemplo, isolamento. O fato de diminuir $\bar{\nu}$ que os indivíduos infectados apresentariam uma carga viral menor, o que está relacionado à medidas de **tratamento**.

Referências

- [1] Barros, L. C. e Bassanezi, R. C. *Um exemplo de modelagem de fenômenos incertos - E. D. fuzzy*, Revista de Biomatemática, 5, pp. 121-128. IMECC-UNICAMP, XVII CNMAC, 1995.
- [2] Bassanezi, R. C. e Barros, L. C. *A simple model of life expectancy with subjective parameters*, Kibernetes: Int. Jour. of Systems and Cybernetics 24 (9), pp. 91-98, 1995.

-
- [3] Dubois, D., Prade, H. e Sessa, S. *Recent Literature*, Fuzzy Sets and Systems, 100, pp. 381-386, 1998.
- [4] Leite, M. B. F. *Heterogeneidade Populacional e Fatores Abióticos na Dinâmica de uma Epidemia*, Tese de Doutorado, IMECC-UNICAMP, 1999.
- [5] Ortega, N. R. S., Sallum, P. C. e Massad, E. *Fuzzy Dynamical Systems in Epidemic Modelling*, Kibernetes: Int. Jour. of Systems and Cybernetics, to appear, 1999.
- [6] Zadeh, L. A. *Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility*, Fuzzy Sets and Systems, 1, pp. 3-28, 1978.